Examen VWO

2026

tijdvak 1
woensdag 13 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 17 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 75 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1025-a-26-1-o

Formules

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

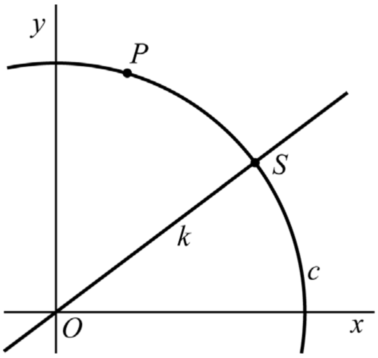
$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

Een punt en een lijn

Gegeven is het punt $P(7, 24)$ en de lijn k met vergelijking $3x - 4y = 0$.

De cirkel c heeft middelpunt O en gaat door punt P. Cirkel c snijdt lijn k rechts van de y-as in het punt S. In figuur 1 is deze situatie weergegeven.

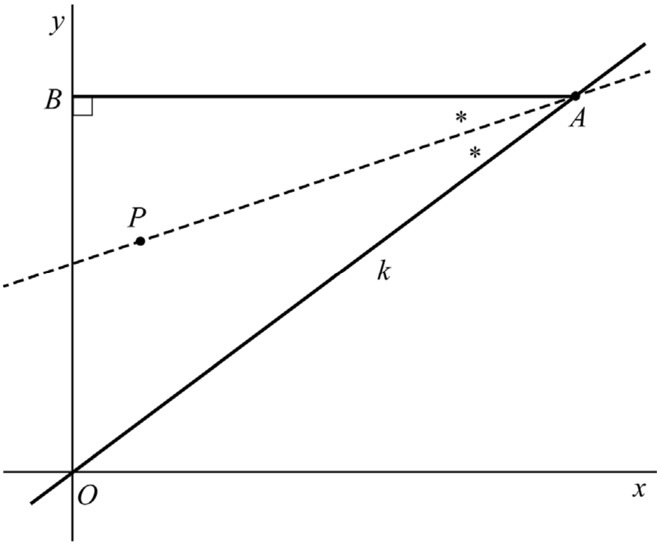
figuur 1



4p **1** Bereken exact de coördinaten van S.

Het punt A ligt op lijn k met vergelijking $3x - 4y = 0$. Het punt B is de loodrechte projectie van punt A op de y-as. Punt A kan zo worden gekozen dat de bissectrice (deellijn) van hoek OAB door punt $P(7, 24)$ gaat. In figuur 2 is deze bissectrice gestippeld weergegeven.

figuur 2



5p **2** Bereken algebraïsch de coördinaten van A.

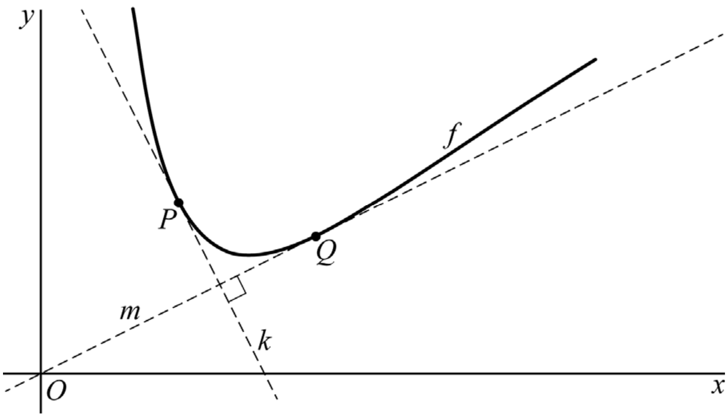
Twee snijpunten

De functie f wordt voor $0 < x \leq 2$ gegeven door:

$$f(x) = 2\ln(x) + \frac{3}{2x} - 1$$

Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = \frac{1}{2}$. De lijn k raakt de grafiek van f in P. De lijn m staat loodrecht op lijn k en raakt de grafiek van f in het punt Q. Zie de figuur.

figuur



6p **3** Bereken exact de x-coördinaat van Q.

De functie g wordt gegeven door:

$$g(x) = 2\ln(2x) + \frac{3}{4x} - 1$$

Het is mogelijk de grafiek van g te laten ontstaan uit de grafiek van f door middel van één transformatie.

2p **4** Geef deze transformatie.

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S.

4p **5** Bereken exact de x-coördinaat van S.

Perforatie en oppervlakte

De functie f_p wordt gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{|x-2|+p}{x-1}$$

Voor één waarde van p heeft de grafiek van f_p een perforatie.

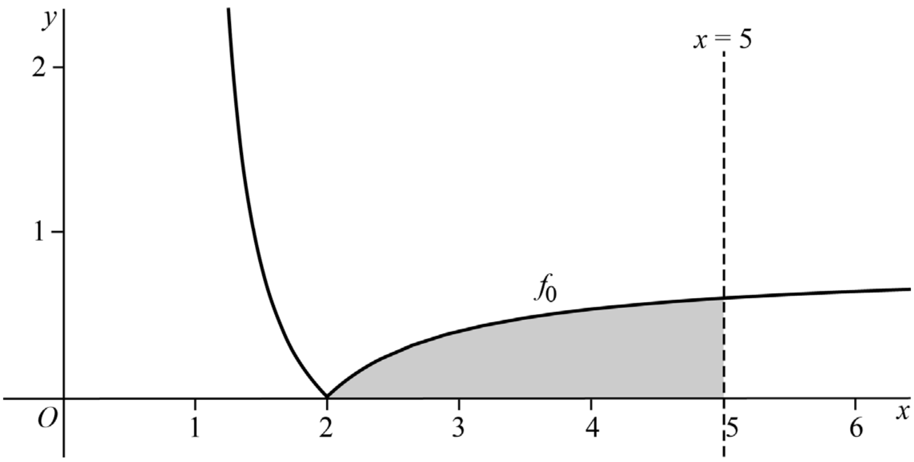
5p **6** Bereken exact de coördinaten van deze perforatie.

Het functievoorschrift van f_0 kan voor $x > 1$ worden geschreven als:

$$f_0(x) = \left| 1 - \frac{1}{x-1} \right|$$

In de figuur is de grafiek hiervan weergegeven.

figuur



Het punt $(2, 0)$ is het snijpunt van de grafiek van f_0 met de x-as.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f_0, de x-as en de lijn met vergelijking $x = 5$. Dit vlakdeel is in de figuur grijs gemaakt.

3p **7** Bereken exact de oppervlakte van V.

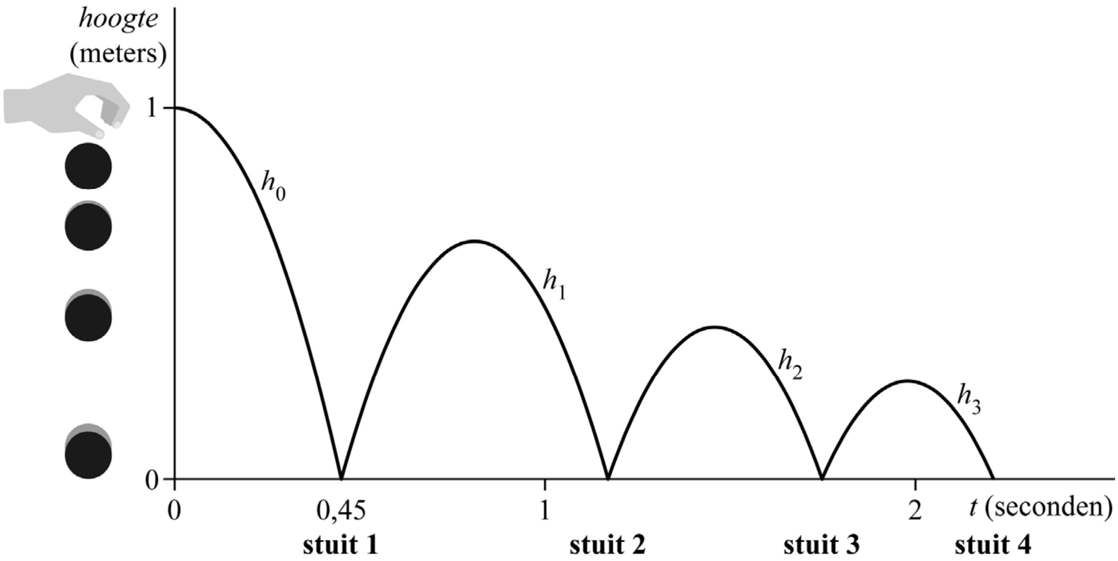
Stuiterbal

In deze opgave bekijken we een vereenvoudigd model van de situatie waarin iemand een stuiterbal recht omlaag laat vallen.
Deze bal zal dan een aantal keer stuiteren. Het moment waarop de bal de grond raakt noemen we **stuit.** Na elke stuit komt de stuiterbal minder hoog dan na de voorgaande stuit.

De hoogte van de stuiterbal tussen twee opeenvolgende keren stuiten wordt steeds beschreven door een kwadratische functie van de tijd t.
Vanaf het loslaten tot aan de eerste stuit heet de functie h_0, tussen de eerste en de tweede stuit heet de functie h_1, vervolgens h_2 enzovoorts.
De grafieken van deze functies zijn delen van parabolen.

In deze opgave bekijken we een stuiterbal die wordt losgelaten vanaf een hoogte van 1 meter op tijdstip $t = 0$. De eerste stuit is na 0,45 seconden.
Zie figuur 1.

figuur 1

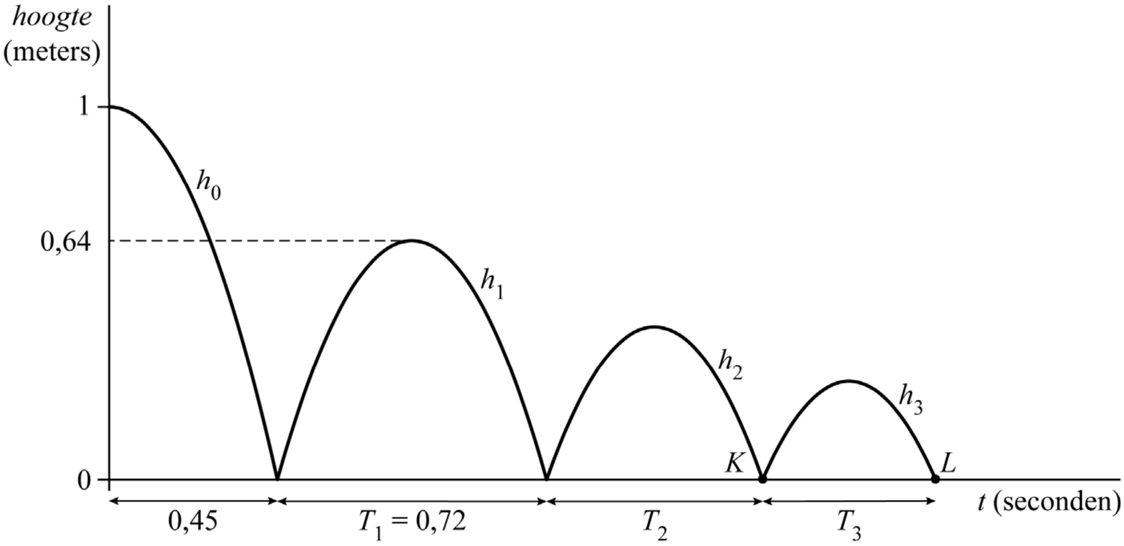


Er geldt (bij benadering) $h_0(t) = -4{,}9t^2 + 1$, met t in seconden en h_0 de hoogte in meters.

2p **8** Bereken algebraïsch de snelheid in m/s waarmee de stuiterbal voor het eerst de grond raakt. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Tussen twee opeenvolgende stuiten bereikt de stuiterbal een hoogste punt. Iedere keer is de hoogte van dat hoogste punt 64% van de hoogte van het voorgaande hoogste punt.

figuur 2



In de figuur hierboven is te zien dat de tijdsduur tussen twee opeenvolgende stuiten steeds korter wordt. Deze tijdsduur T_n is in seconden. We geven deze tijdsduur in seconden aan met T_n. Zo is $T_1 = 0,72$ de tijdsduur tussen de eerste en de tweede stuit, T_2 de tijdsduur tussen de tweede en derde stuit enzovoorts. T_3 loopt van tijdstip K tot tijdstip L.

Een formule voor T_n is:

$$T_n = 0,9 \cdot 0,8^n \text{ met } n \geq 1.$$

7p **9** Stel met bovenstaande gegevens een functievoorschrift op van h_3.
Geef de getallen in je eindantwoord in twee decimalen.

Lus

Het punt P beweegt volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = t^2(2-t) \\ y(t) = 2t(2-t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2 \text{ en } t \text{ in seconden.}$$

De snelheidsvector op tijdstip t is $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4t - 3t^2 \\ 4 - 4t \end{pmatrix}$.

De baansnelheid van P is op één tijdstip t minimaal.

3p **10** Bereken deze waarde van t. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

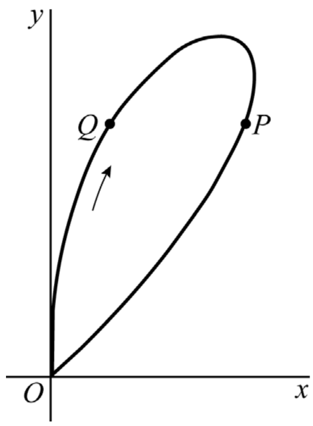
De baan die P doorloopt is in figuur 1 weergegeven. De pijl geeft de richting aan waarin het punt de baan doorloopt.

Het punt Q doorloopt dezelfde baan als punt P. Q loopt steeds 1 seconde achter op punt P en beweegt in dezelfde richting als P.

Er is één tijdstip t waarop de punten P en Q op gelijke hoogte liggen. In figuur 1 is deze situatie weergegeven.

4p **11** Bereken exact de lengte van lijnstuk PQ in deze situatie.

figuur 1



De bewegingsvergelijkingen van een ander punt zijn gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = t^2(2-t) \\ y(t) = at(2-t) \end{cases}$$

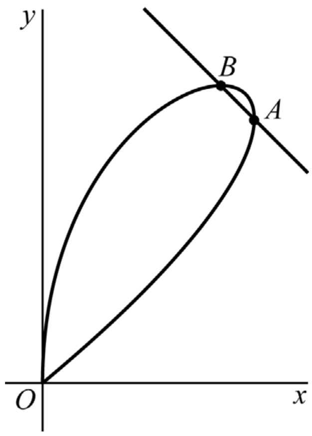
Hierin is a een constante, waarbij $a \neq 0$.

Punt A is het punt van de baan waarbij de x-coördinaat maximaal is; punt B is het punt van de baan waarbij de y-coördinaat maximaal is.

Er is een waarde van a waarvoor de richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B gelijk is aan -1. In figuur 2 is deze situatie weergegeven.

6p **12** Bereken exact deze waarde van a.

figuur 2



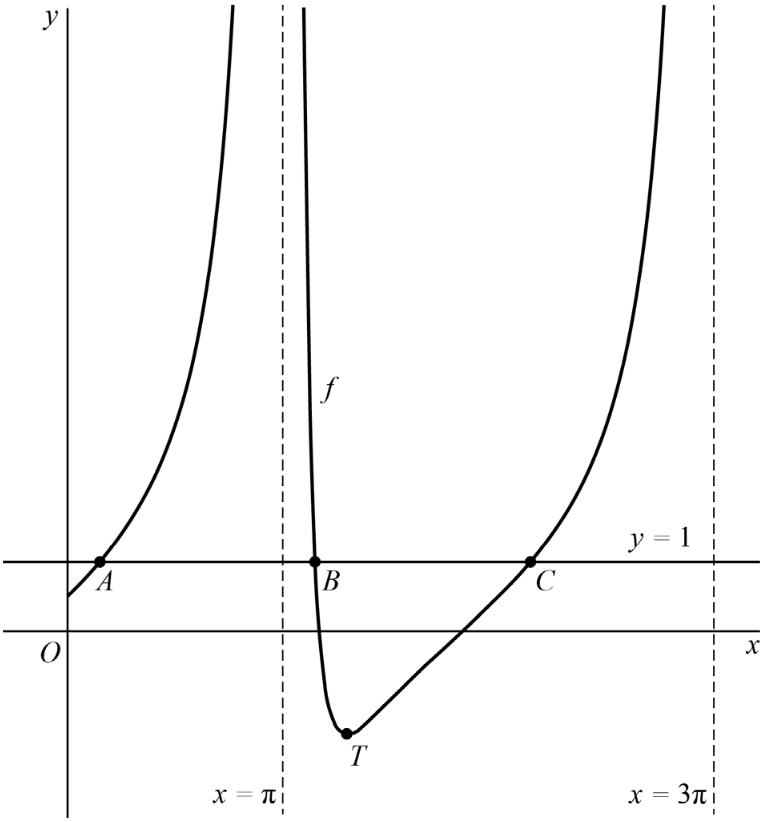
Gebroken gonio

De functie f wordt gegeven door:

$$f(x) = \frac{1+2\sin(x)}{1+\cos(x)} \text{ voor } 0 \le x < \pi \text{ en } \pi < x < 3\pi$$

De lijn met vergelijking $y = 1$ snijdt de grafiek van f in de punten A, B en C, met $x_A < x_B < x_C$. Zie de figuur. Hierin zijn de twee verticale asymptoten gestippeld weergegeven.

figuur



3p **13** Toon op algebraïsche wijze aan dat $AB = BC$.

De grafiek van f heeft een top T. Deze ligt onder de x-as. Zie de figuur. Voor de x-coördinaat van T geldt: $5\cos^2(x) + 8\cos(x) + 3 = 0$

6p **14** Bewijs dat dit juist is.

5p **15** Bereken algebraïsch de y-coördinaat van T.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

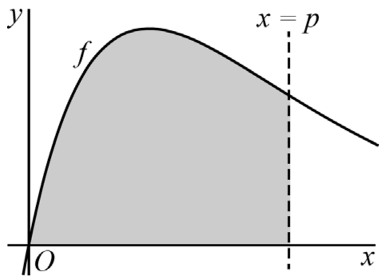
Begrensde inhoud

De functie f wordt gegeven door

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}.$$

In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven.
De grafiek snijdt de x-as in de oorsprong.
Ook is voor een waarde van $p > 0$ de lijn met vergelijking $x = p$ weergegeven.

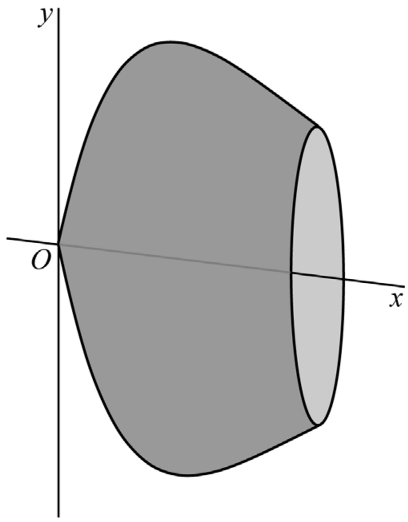
figuur 1



We bekijken het gebied dat wordt begrensd door de lijn met vergelijking $x = p$, de x-as en de grafiek van f.
Dit gebied is in figuur 1 met grijs weergegeven.

Het grijze gebied wordt gewenteld om de x-as.
Zo ontstaat een omwentelingslichaam.
Zie figuur 2.

figuur 2



De inhoud van het omwentelingslichaam is L_p. Hiervoor geldt:

$$L_p = \tfrac{1}{12}\pi\left(1 - 6\mathrm{e}^{-2p} + 8\mathrm{e}^{-3p} - 3\mathrm{e}^{-4p}\right)$$

6p **16** Bewijs dat bovenstaande formule voor L_p juist is.

Als p onbegrensd toeneemt, nadert L_p tot een limietwaarde L. Er is een waarde van p waarvoor L_p gelijk is aan de helft van de limietwaarde L.

4p **17** Bereken deze waarde van p.
Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.