Onbekende zijde

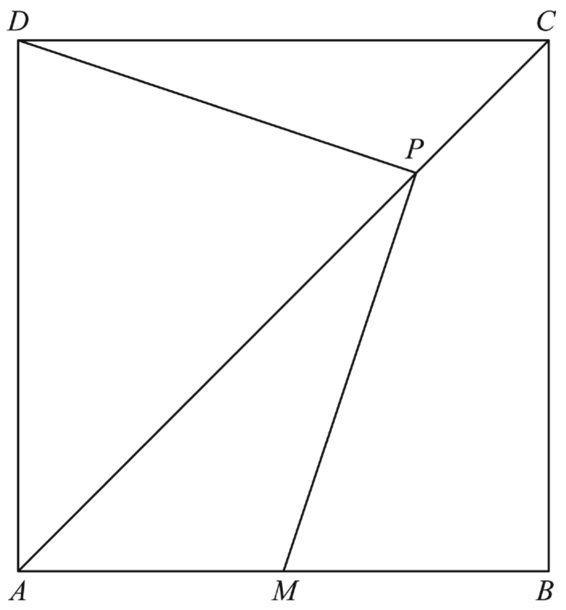
Gegeven is driehoek ABC met $AB = 4$ en $BC = 12$.
Punt M is het midden van lijnstuk BC. Verder geldt: $AM = 5$.

4p **1** Bereken algebraïsch de lengte van AC. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Op de diagonaal van een vierkant

Gegeven is een vierkant $ABCD$ met zijde 2. Punt M is het midden van lijnstuk AB. Punt P ligt op diagonaal AC en valt niet samen met punt A of punt C. Zie de figuur.

figuur



P kan zo worden gekozen dat de lijnstukken DP en MP loodrecht op elkaar staan.

6p **3** Bereken exact de lengte van lijnstuk AP in deze situatie.

Vereenvoudigde sterrenkunde

De Wet van Titius-Bode[1)] is een wet uit de astronomie die door Johann Titius werd opgesteld in de achttiende eeuw. Deze wet legt een verband tussen het **rangnummer** van een planeet en de afstand van die planeet tot de zon. Met het rangnummer van een planeet wordt bedoeld: ‘de zoveelste planeet geteld vanaf de zon’. De planeet die het dichtst bij de zon staat krijgt nummer 1, de volgende 2 enzovoorts.
De wet luidt:

$$a = 0,4 + 0,3 \cdot 2^{n-2}$$

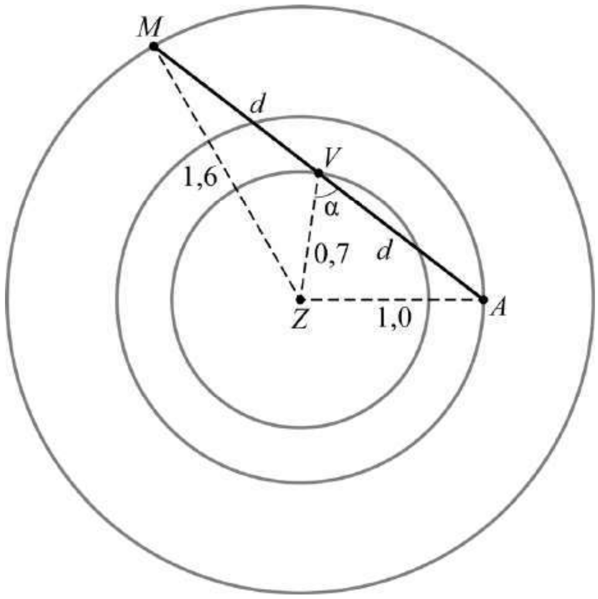
Hierin is a de afstand van de planeet tot de zon uitgedrukt in AE (Astronomische Eenheid, 1 AE = afstand van de aarde tot de zon) en is n het rangnummer van de planeet.

Saturnus heeft volgens de Wet van Titius-Bode een afstand van 10 AE tot de zon.

2p **15** Bereken exact welk rangnummer Saturnus dan zou hebben.

We bekijken de planeten Mars, Venus en de aarde. We gaan uit van het volgende eenvoudige model:
De drie planeten draaien ieder in een cirkelvormige baan met de zon als middelpunt. De drie banen liggen in één plat vlak.
De afstand van Venus tot de zon is 0,7 AE, de afstand van de aarde tot de zon is 1,0 AE en de afstand van Mars tot de zon is 1,6 AE.

figuur 1 (afstanden in AE)



Het is mogelijk dat de drie planeten op één lijn liggen waarbij Venus precies midden tussen Mars en de aarde in ligt. Deze situatie is weergegeven in figuur 1.

noot 1 Er is geen wetenschappelijke onderbouwing voor deze wet en er wordt tegenwoordig aangenomen dat de wet alleen berust op een toevallige overeenkomst met de werkelijke afstanden.

De afstand in AE van de aarde tot Venus is d en hoek AVZ in graden is α.
Met behulp van figuur 1 kan het volgende verband tussen d en α worden gevonden:

$$\frac{d^2 - 0{,}51}{\cos(\alpha)} = \frac{d^2 - 2{,}07}{\cos(180^\circ - \alpha)}$$

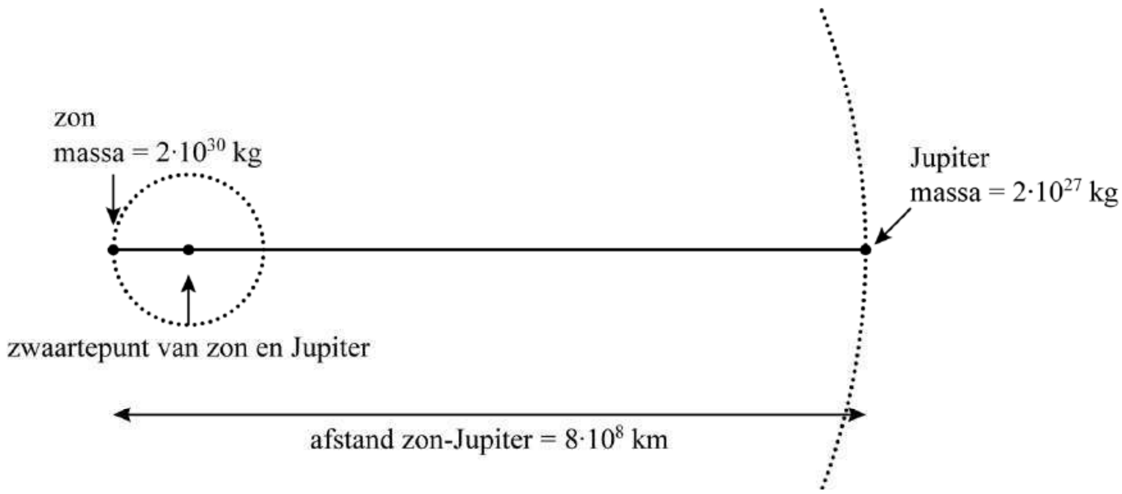
3p **16** Bewijs dat dit verband juist is.

3p **17** Bereken algebraïsch de afstand in AE van de aarde tot Venus in de gegeven situatie. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Meestal wordt gezegd dat de planeten in ons zonnestelsel om de zon draaien. Dat klopt echter niet helemaal: de zon en de planeten draaien allemaal om hun gemeenschappelijke zwaartepunt.

Stel dat het zonnestelsel alleen zou bestaan uit Jupiter en de zon. We beschouwen deze twee hemellichamen als twee puntmassa's.
Jupiter is verreweg de zwaarste planeet in ons zonnestelsel met een massa van $2 \cdot 10^{27}$ kg en een afstand tot de zon van $8 \cdot 10^{8}$ km. De zon heeft een massa van $2 \cdot 10^{30}$ kg. Zie figuur 2 (niet op schaal).

figuur 2



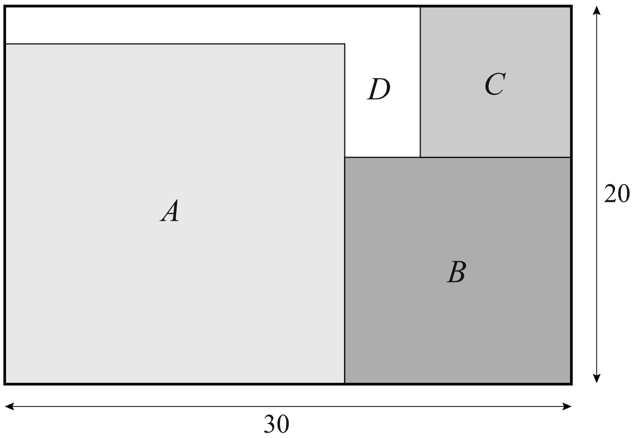
De kleine cirkel in figuur 2 is de baan van de zon om het zwaartepunt.
4p **18** Bereken de straal van deze baan in km. Geef je eindantwoord in honderdduizendtallen.

Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.

Drie vierkanten in een rechthoek

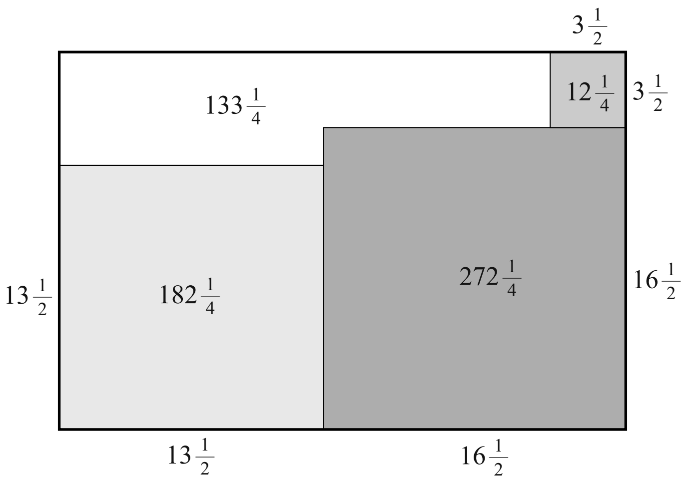
In een rechthoek van 20 bij 30 liggen drie vierkanten: A linksonder, B rechtsonder en C rechtsboven. Van elk vierkant valt een van de hoekpunten samen met een van de hoekpunten van de rechthoek. A en B liggen tegen elkaar aan, en B en C ook. Het deel van de rechthoek dat niet bedekt is door de vierkanten noemen we D. Zie figuur 1.

figuur 1



Als de lengte van de zijde van vierkant A gekozen is, liggen de afmetingen van de delen B, C en D vast.
In figuur 2 is, bij een keuze van $13\frac{1}{2}$ voor de zijde van vierkant A, van elk deel de oppervlakte aangegeven.

figuur 2



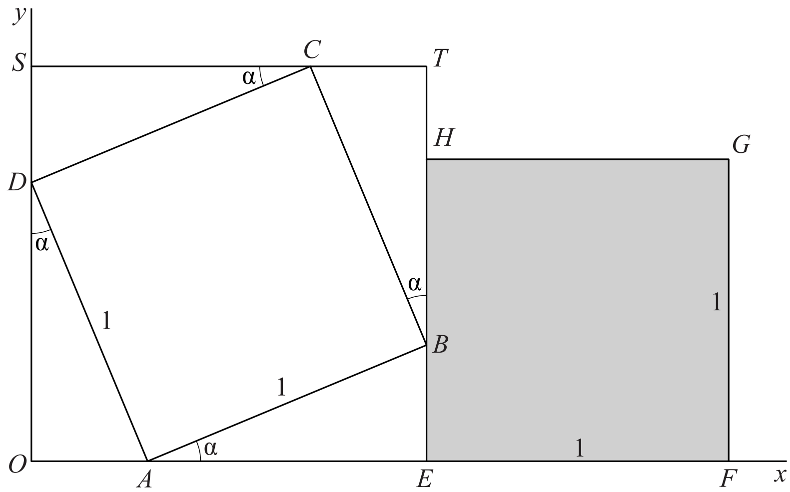
Er is een lengte van de zijde van vierkant A waarvoor de oppervlakte van D maximaal is.

9p **10** Bereken exact deze lengte.

Vierkanten

In figuur 1 zie je in een assenstelsel een vierkant $ABCD$ met zijde 1. Hoekpunt A ligt op de positieve x-as en hoekpunt D op de positieve y-as. Vierkant $EFGH$ heeft ook zijde 1. Dit vierkant ligt naast $ABCD$ zo dat zijde EF op de x-as ligt en hoekpunt B van vierkant $ABCD$ op zijde EH ligt. Om vierkant $ABCD$ is een derde vierkant $OETS$ getekend met horizontale en verticale zijden.
Voor de hoek α (in rad) die zijde AB met de x-as maakt, geldt: $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$
In figuur 1 is aangegeven welke hoeken gelijk zijn aan α.

figuur 1

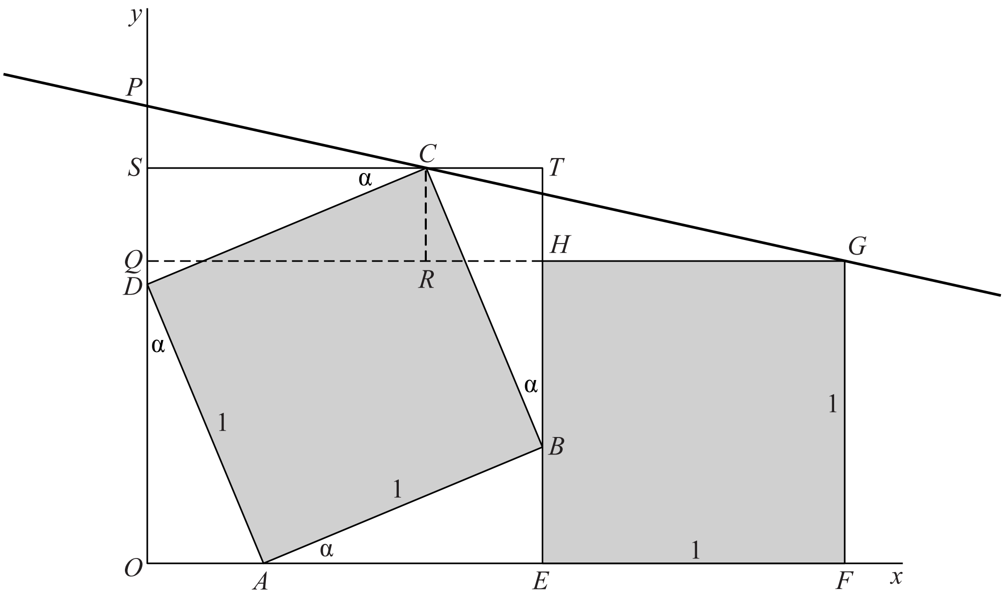


De coördinaten van C en G hangen als volgt van α af:
$C(\cos\alpha,\ \sin\alpha+\cos\alpha)$ en $G(\sin\alpha+\cos\alpha+1,\ 1)$.

4p **5** Bereken exact de oppervlakte van vierkant $OETS$ voor $\alpha=\frac{1}{6}\pi$. Schrijf je antwoord zonder haakjes.

De lijn door G en C snijdt de y-as in P. De loodrechte projectie van G op de y-as noemen we Q en de loodrechte projectie van C op de lijn GQ noemen we R. Zie figuur 2.

figuur 2



Er geldt $OP = 1 + \dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)}{\sin\alpha + 1}$.

5p **6** Toon aan dat deze formule juist is.

De lengte van OP kan ook geschreven worden als $OP = 1 + \dfrac{\sin(2\alpha)}{\sin\alpha + 1}$.

4p **7** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

De hoogte van punt C is maximaal als $\alpha = \frac{1}{4}\pi$. Maar de hoogte van punt P is maximaal voor een andere waarde van α tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.

6p **8** Bereken met behulp van differentiëren bij welke waarde van α de hoogte van punt P maximaal is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Slingshot

De Slingshot is een kermisattractie.
Tussen de toppen van twee palen hangt aan twee identieke elastische koorden een capsule die plaats biedt aan twee personen. Zie de foto.
De capsule wordt allereerst omlaag getrokken tot aan de grond. Op dat moment gaan er twee personen in de capsule zitten. Vervolgens wordt de capsule losgelaten. De capsule schiet dan recht omhoog. Daarna valt hij recht omlaag, gaat weer omhoog, enzovoorts. Na enige tijd komt de capsule stil te hangen.

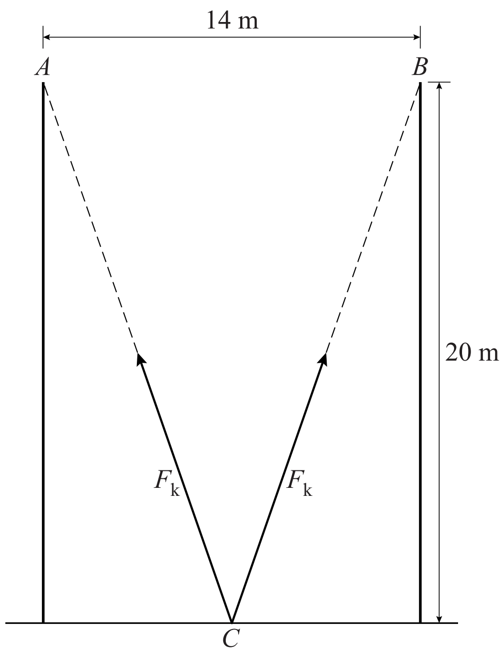
foto

Gegeven is:
- De palen staan 14 m uit elkaar.
- De palen staan verticaal.
- De palen zijn 20 m hoog.
- Zonder uitrekking heeft elk koord een lengte van 8 m.
- Elk koord trekt aan de capsule met een kracht die afhangt van de lengte van het uitgerekte koord. De grootte van deze kracht kan berekend worden met de formule:

  $$F_{\text{k}} = 0{,}6 \cdot (L - 8)$$

  Hierbij is F_{k} de grootte van de kracht in kN (kilonewton) en L de lengte van het uitgerekte koord in m (met $L \geq 8$).

figuur 1



In figuur 1 is de beginsituatie weergegeven. De capsule is aangegeven met het punt C en de toppen van de palen met A en B.
De capsule bevindt zich op de grond, midden tussen de palen.
Beide koorden, CA en CB, zijn dan flink uitgerekt en staan strak.

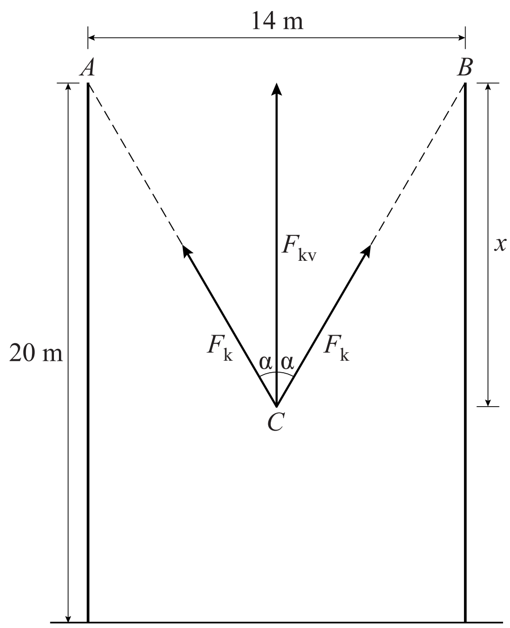
3p **6** Bereken de grootte van de kracht in kN waarmee een koord in de beginsituatie aan de capsule trekt. Geef je eindantwoord in één decimaal.

De twee krachten kun je weergeven met twee vectoren.
De som van deze twee vectoren is een vector die een verticale kracht weergeeft met grootte F_{kv}. De grootte van deze kracht kan berekend worden met de volgende formule:

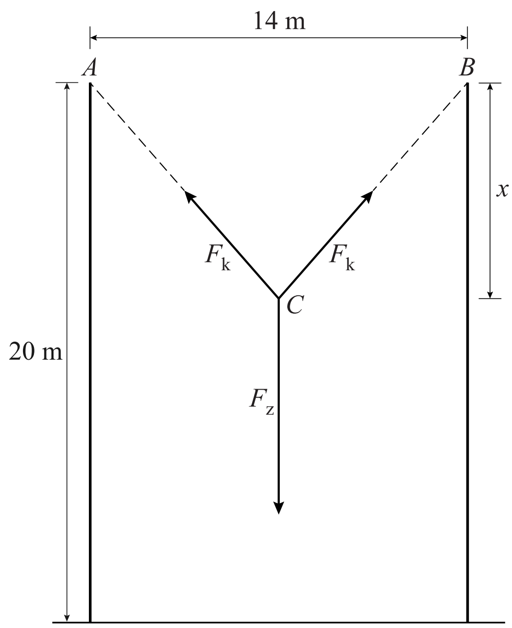
$$F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos(\alpha)$$

Hierin is α de hoek tussen een koord en de verticale vector. Zie figuur 2.

figuur 2



figuur 3



Op de capsule, inclusief de twee personen, werkt niet alleen de kracht van beide koorden, maar ook de zwaartekracht F_z, die recht naar beneden is gericht. Zie figuur 3. Deze zwaartekracht bedraagt 1,8 kN.
In figuur 2 en figuur 3 is ook het hoogteverschil tussen C en de toppen van de palen met x aangegeven.

Na een aantal keren op en neer te zijn geslingerd, is de capsule tot stilstand gekomen. Op dat moment heft de zwaartekracht de twee krachten op die door de koorden samen worden uitgeoefend.

Er geldt dan dus: $F_{kv} = F_z$

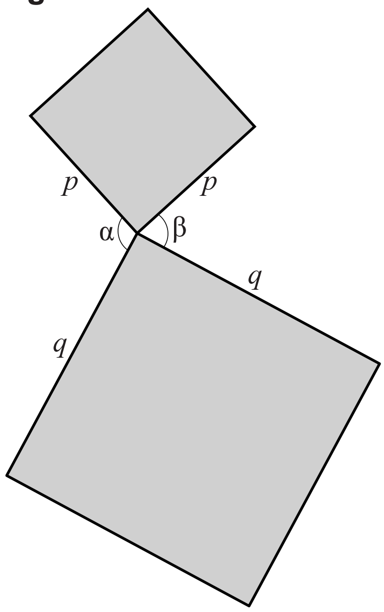
De hoogte waarop de capsule tot stilstand komt, is te berekenen door eerst F_{kv} in x uit te drukken.

6p **7** Druk F_{kv} uit in x en bereken daarmee hoe hoog de capsule boven de grond hangt als hij tot stilstand is gekomen. Geef je eindantwoord in gehele meters.

Vier vierkanten

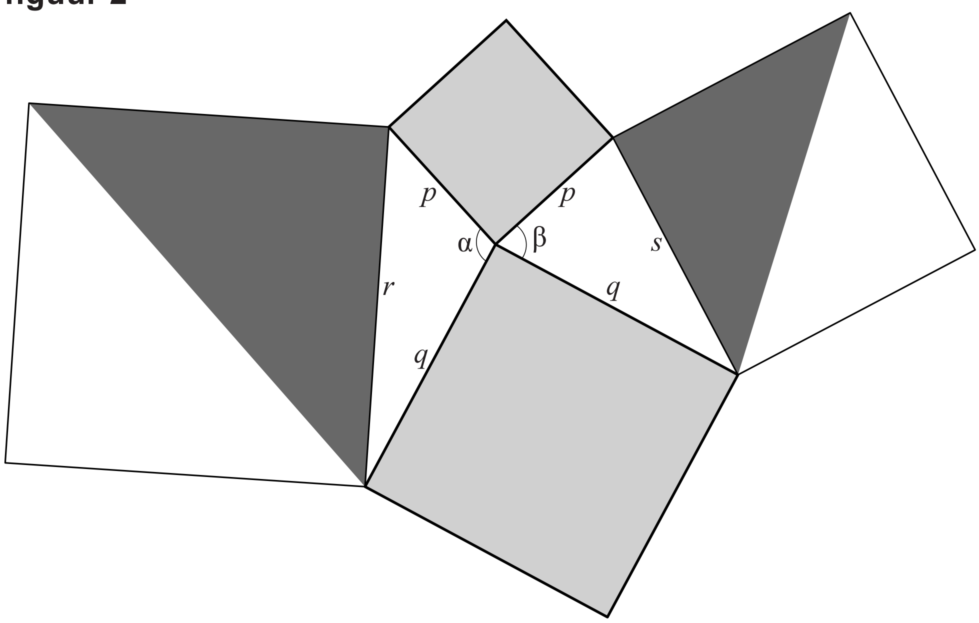
Gegeven zijn twee vierkanten, één met zijde p en één met zijde q. De vierkanten hebben één hoekpunt gemeenschappelijk.
De hoeken die de zijden van de vierkanten met elkaar maken in het gemeenschappelijke hoekpunt noemen we α en β. Zie figuur 1.

figuur 1



Figuur 2 is een uitbreiding van figuur 1. Er zijn twee vierkanten toegevoegd:
– een vierkant met zijde r dat met elk van de vierkanten uit figuur 1 één hoekpunt gemeenschappelijk heeft;
– een vierkant met zijde s dat met elk van de vierkanten uit figuur 1 één hoekpunt gemeenschappelijk heeft.

figuur 2



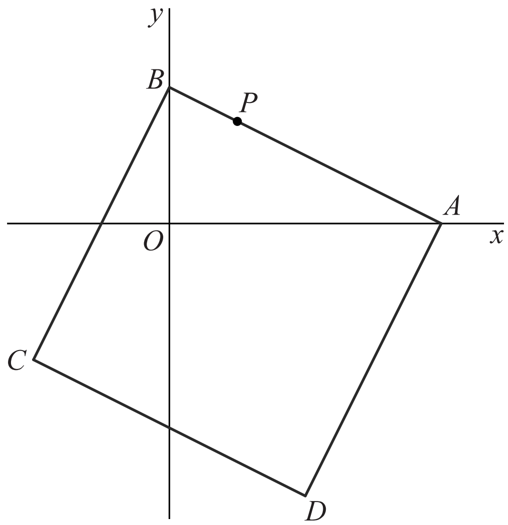
In figuur 2 zijn de vierkanten met zijden p en q lichtgrijs gekleurd; van elk van de vierkanten met zijden r en s is de helft donkergrijs gekleurd.

6p **16** Bewijs dat de totale oppervlakte van de lichtgrijze delen gelijk is aan de totale oppervlakte van de donkergrijze delen.

Gekanteld vierkant

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met hoekpunten $A(8,0)$, $B(0,4)$, $C(-4,-4)$ en $D(4,-8)$.
Op zijde AB ligt het punt $P(2,3)$.
Zie figuur 1.

figuur 1



De punten B, C en P liggen op één cirkel.

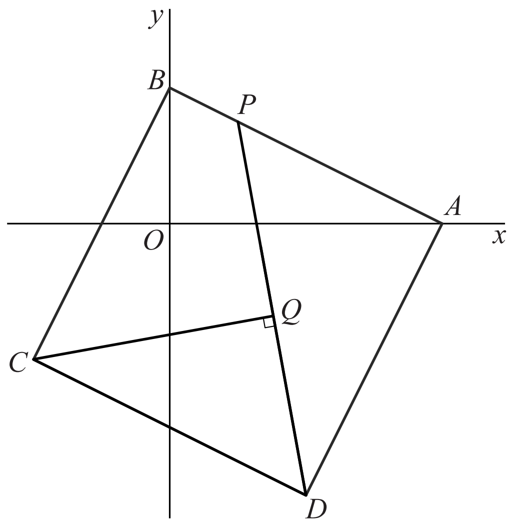
5p **8** Stel een vergelijking op van deze cirkel.

Over lijnstuk DP beweegt (van D naar P) een punt Q.

Er is een positie van Q waarvoor lijnstuk CQ loodrecht staat op lijnstuk DP. Zie figuur 2.

5p **9** Bereken voor deze positie exact de coördinaten van Q.

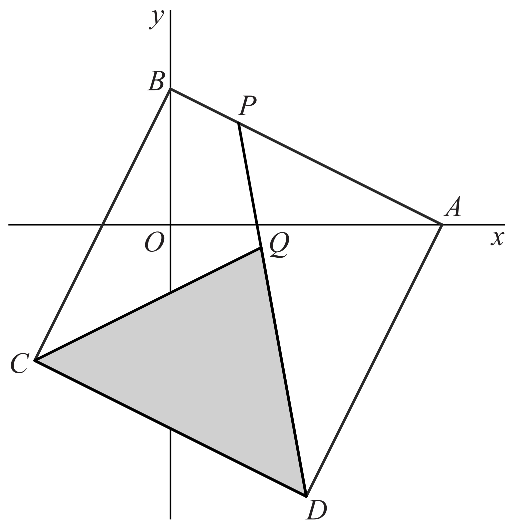
figuur 2



In figuur 3 is driehoek CDQ grijs gemaakt.
Er is een positie van Q waarbij de oppervlakte van driehoek CDQ een derde deel is van de oppervlakte van vierkant $ABCD$.

5p **10** Bereken voor deze positie exact de coördinaten van Q.

figuur 3



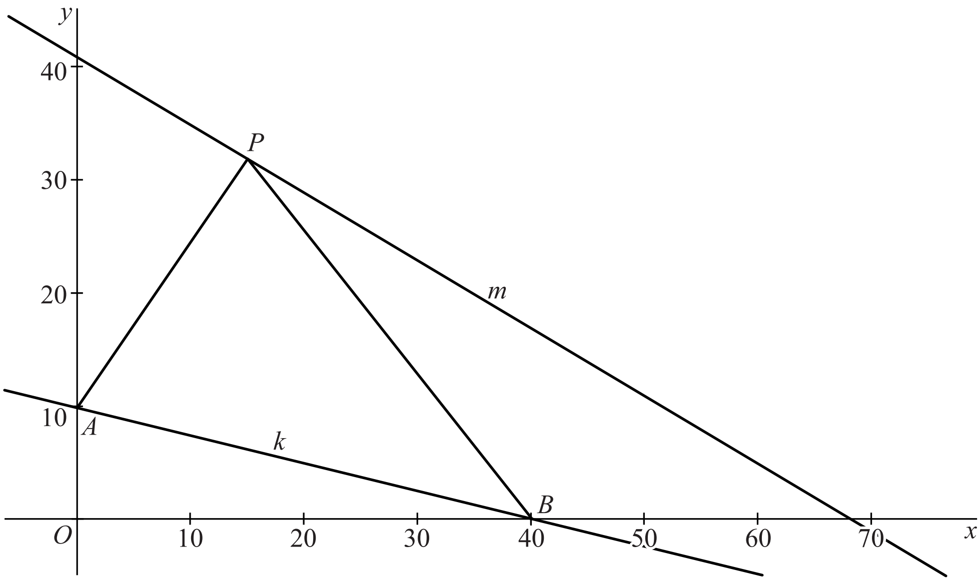
Driehoek met bewegend hoekpunt

Lijn k gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(40,0)$.
De baan van een punt P is gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$$

De baan van punt P is de lijn m. Zie de figuur.

figuur



Bij bijna elke positie van punt P vormen de punten A, B en P een driehoek ABP. Er is één uitzondering.

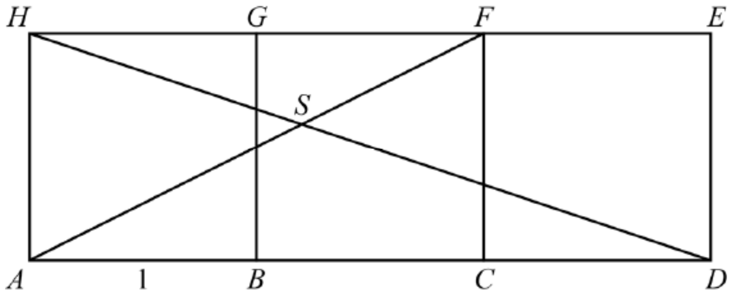
5p **13** Bereken de coördinaten van P zodat A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek vormen.

8p **14** Onderzoek op algebraïsche wijze of er een positie van P is, zó dat driehoek ABP een rechte hoek heeft bij P én driehoek ABP een gelijkbenige driehoek is.

Drie op een rij

Rechthoek $ADEH$ bestaat uit drie vierkanten $ABGH$, $BCFG$ en $CDEF$.
Hierbij is $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Verder zijn gegeven de lijnstukken AF en HD.
S is het snijpunt van AF en HD.
Zie de figuur.

figuur



Er geldt: $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

3p **4** Bewijs dit.

3p **5** Onderzoek of de vectoren $\overrightarrow{BS}$ en $\overrightarrow{HD}$ loodrecht op elkaar staan.