Maxima en minima

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$.

De grafiek van f heeft oneindig veel toppen.

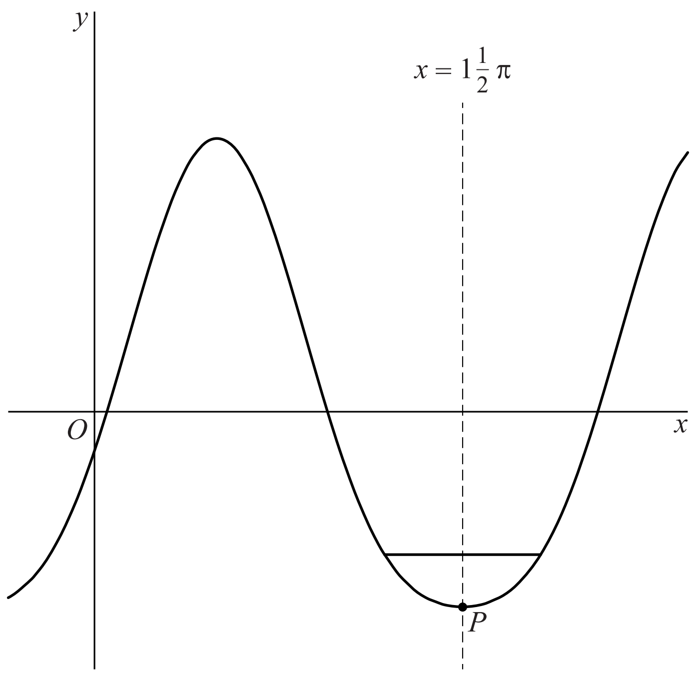
6p **8** Bereken exact de x-coördinaten van alle toppen van de grafiek van f.

Een van de toppen is het punt $P\left(1\frac{1}{2}\pi, -5\right)$.

De grafiek van f is symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door P.

Boven P wordt een horizontaal lijnstuk van lengte 2 geplaatst, waarvan de eindpunten op de grafiek van f liggen. Zie de figuur.

figuur



4p **9** Bereken de afstand van P tot het horizontale lijnstuk. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

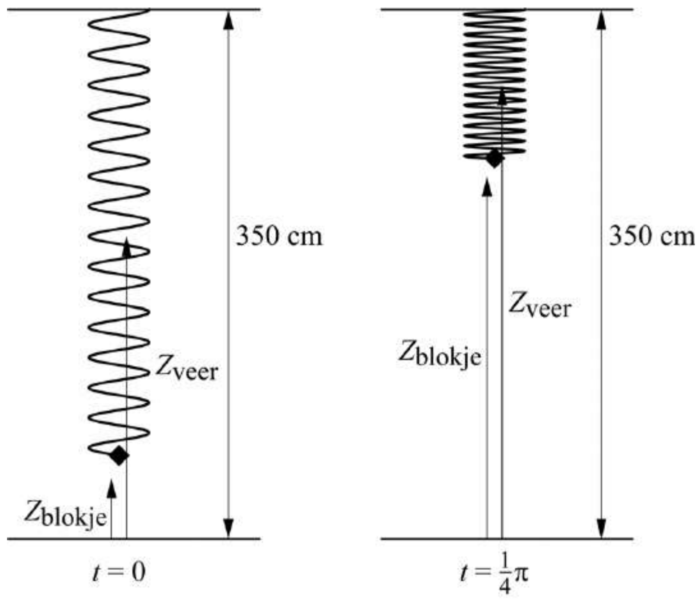
Op en neer

Twee leerlingen doen als volgt een onderzoek voor hun profielwerkstuk:

Een metalen blokje hangt aan een lange veer die is bevestigd aan een plafond op een hoogte van 350 cm. Het blokje wordt recht naar beneden getrokken en op $t = 0$ losgelaten. Het blokje beweegt vervolgens op en neer. Zie figuur 1.

De afmetingen van het blokje en de wrijvingskracht worden verwaarloosd.

figuur 1



Zowel het blokje als de veer heeft een zwaartepunt. In deze opgave bekijken we eerst de zwaartepunten van het blokje en de veer apart.

De hoogte van het **zwaartepunt van het blokje** wordt benaderd door het volgende model: $Z_{\text{blokje}}(t) = 150 - 100\cos(4t)$

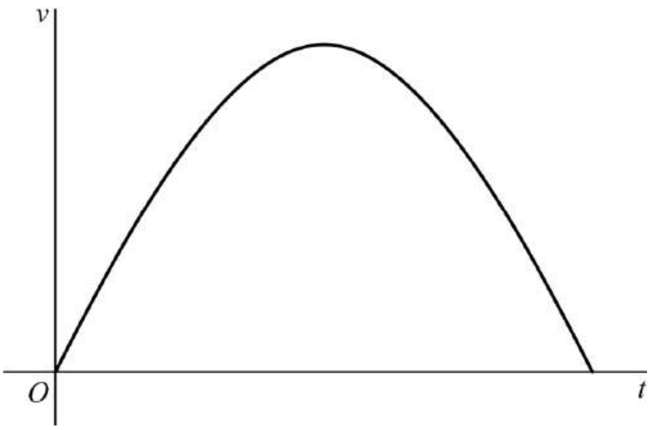
Hierbij is Z_{blokje} de hoogte van het zwaartepunt van het blokje in cm en t de tijd in seconden.

Het **zwaartepunt van de veer** bevindt zich op elk moment in het midden van de veer.

3p **11** Laat met behulp van het gegeven model van het blokje en figuur 1 zien dat voor de hoogte van het zwaartepunt van de veer in cm geldt: de amplitude is 50 en de evenwichtsstand is 250.

Op het moment dat het blokje in het laagste punt wordt losgelaten, is zijn snelheid 0. Daarna neemt de snelheid toe tot de maximale snelheid, om vervolgens weer af te nemen, totdat in het hoogste punt de snelheid weer 0 is. In figuur 2 is de grafiek van de snelheid v tijdens de opgaande beweging weergegeven.

figuur 2



Tijdens de opgaande beweging zijn er twee hoogtes waarop de snelheid van het blokje gelijk is aan 255 cm/seconde.

3p **12** Bereken deze twee hoogtes. Geef je eindantwoord in centimeters nauwkeurig.

De hoogte van het zwaartepunt van de veer wordt benaderd door het volgende model: $Z_{\text{veer}}(t) = 250 - 50\cos(4t)$

Hierbij is Z_{veer} de hoogte van het zwaartepunt van de veer in cm en t de tijd in seconden.

Er kan ook gekeken worden naar het zwaartepunt van het blokje en de veer samen. De massa van de veer is 600 gram en de massa van het blokje is 1000 gram. Z_{totaal} is de hoogte van het zwaartepunt van blokje en veer samen.

3p **13** Stel een formule op van Z_{totaal} in de vorm $Z_{\text{totaal}}(t) = a + b\cos(4t)$. Licht je werkwijze toe.

Sinus en cosinus getransformeerd

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2\sin(x - \frac{1}{3}\pi)$.

Het lijnstuk AB verbindt de punten $A(12\pi, 1)$ en $B(16\pi, 1)$.

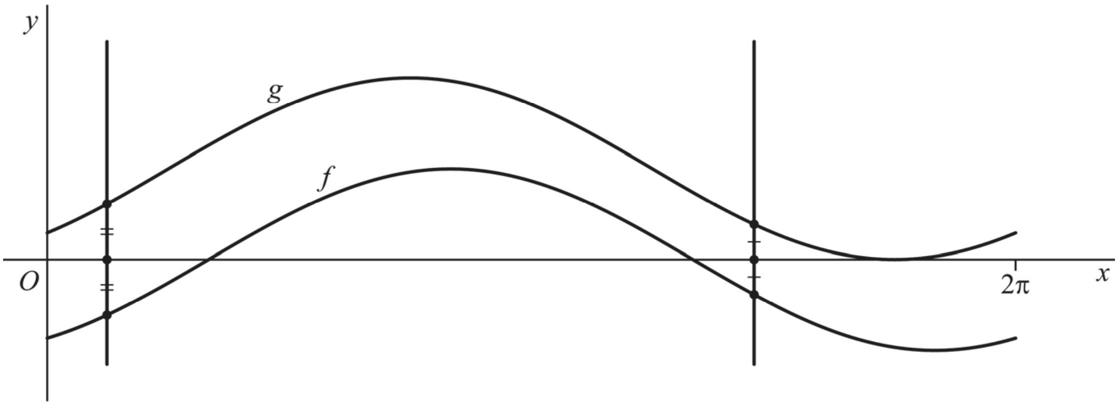
De grafiek van f snijdt dit lijnstuk in meerdere punten.

4p **3** Bereken exact de x-coördinaten van deze snijpunten.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = 2\cos(x - \frac{3}{4}\pi) + 2$.

Voor elke waarde van a snijdt de verticale lijn met vergelijking $x = a$ de grafieken van f en g elk in één punt. Het midden van deze twee punten ligt voor sommige waarden van a op de x-as. Op het domein $[0, 2\pi]$ is dat voor twee waarden van a het geval. Zie figuur 1.

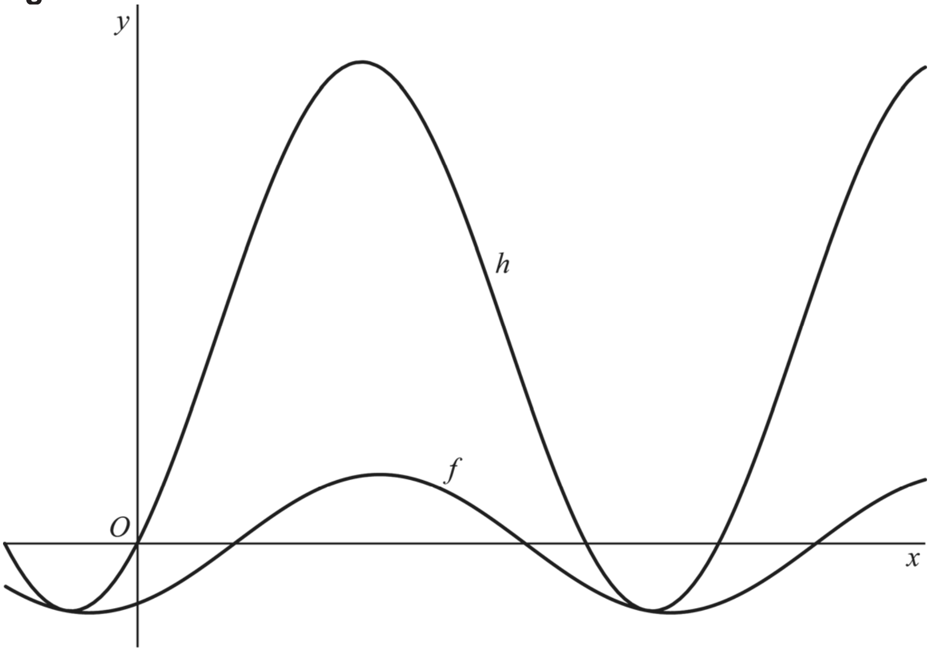
figuur 1



3p **4** Bereken voor welke twee waarden van a dit het geval is. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

De functie h wordt gegeven door $h(x) = f(x) + 3 \cdot g(x)$. In figuur 2 zijn de grafieken van f en h weergegeven.

figuur 2



Je kunt de grafiek van h laten ontstaan uit de grafiek van f door middel van meerdere translaties en één vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as. Neem aan dat dit een vermenigvuldiging is met factor p. Daarbij geldt dat $p > 0$.

4p **5** Bereken deze waarde van p. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

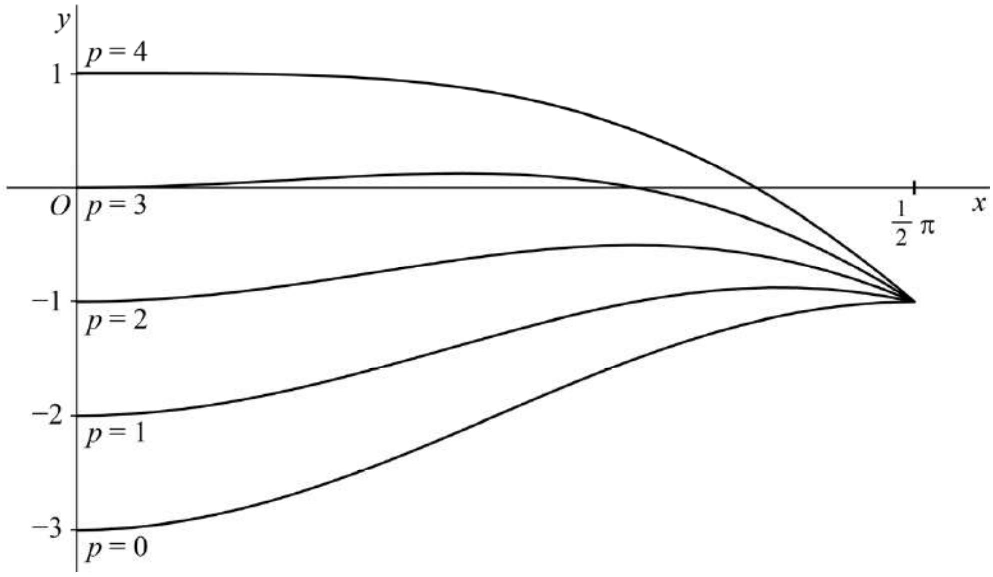
Cosinusgrafiek door hoogste punten

Voor elke p met $0 \le p \le 4$ wordt de functie f_p met domein $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$ gegeven door:

$$f_p(x) = -2\cos^2(x) + p \cdot \cos(x) - 1$$

In figuur 1 is voor enkele waarden van p de grafiek van f_p getekend.

figuur 1

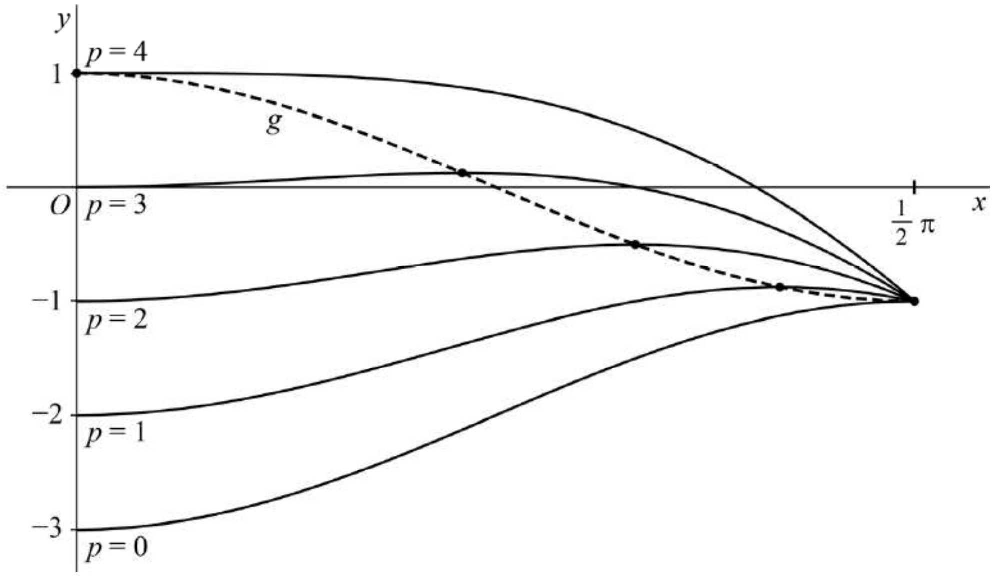


De grafiek van f_3 heeft behalve de oorsprong een tweede gemeenschappelijk punt met de x-as.

4p **13** Bereken exact de x-coördinaat van dat tweede gemeenschappelijke punt.

De grafiek van f_p heeft voor $p = 4$ een hoogste punt voor $x = 0$. Ook voor de andere waarden van p heeft de grafiek van f_p een hoogste punt. In figuur 2 is telkens met een dikke stip het hoogste punt van de grafiek van f_p aangegeven. De gestippelde kromme verbindt deze hoogste punten met elkaar.

figuur 2



Voor de x-coördinaat a van het hoogste punt van de grafiek van f_p geldt dat $\cos(a) = \frac{1}{4}p$.

4p **14** Bewijs dit.

De kromme die de hoogste punten van de grafieken van f_p verbindt, is de grafiek van de functie g gegeven door $g(x) = \cos(2x)$, met $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$.

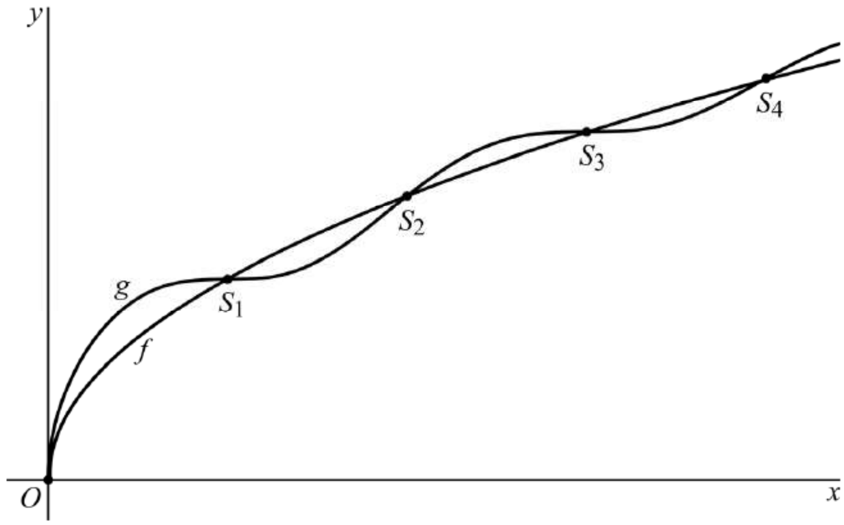
4p **15** Bewijs dit.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Wortel en sinus

De functies f en g worden gegeven door $f(x)=\sqrt{x}$ en $g(x)=\sqrt{x+\sin(x)}$.
In figuur 1 zijn de grafieken van f en g weergegeven.

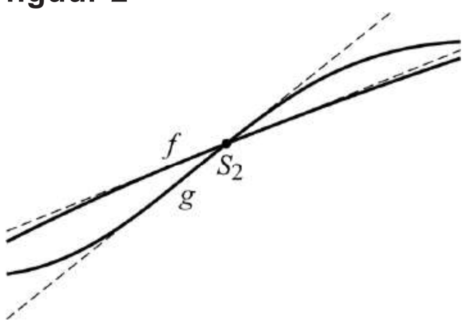
figuur 1



De oorsprong O is een gemeenschappelijk punt van de twee grafieken. Verder snijden de grafieken elkaar achtereenvolgens in de punten $S_1, S_2, S_3, \ldots$.

In figuur 2 is een deel van figuur 1 rondom snijpunt S_2 vergroot weergegeven.
In deze figuur zijn de raaklijnen in S_2 aan de grafiek van f en de grafiek van g gestippeld weergegeven.

figuur 2



De helling van de grafiek van f in S_2 is gelijk aan $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$. De helling van de grafiek van g in S_2 is $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, dus twee keer zo groot.

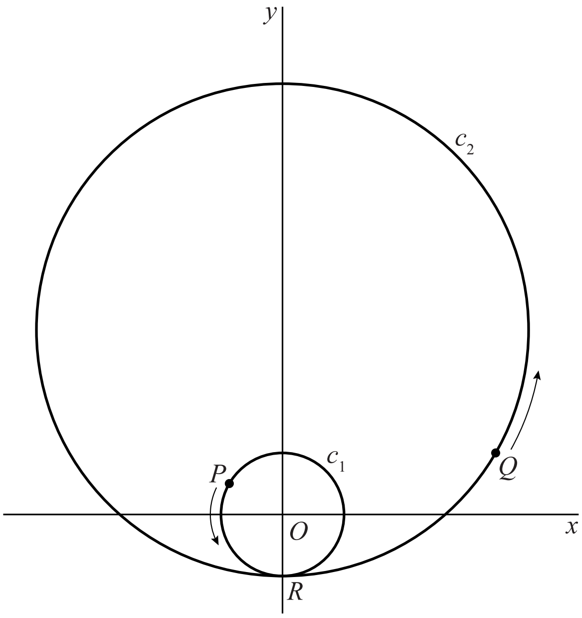
Als n een even getal is, geldt:
In de snijpunten S_n is de helling van de grafiek van g twee keer zo groot als de helling van de grafiek van f.

7p **13** Bewijs deze eigenschap.

Cirkels

Gegeven zijn de cirkels c_1 en c_2. Cirkel c_1 heeft straal $\frac{1}{2}$ en middelpunt O. Het middelpunt van cirkel c_2 ligt op de positieve y-as. Cirkel c_1 ligt binnen cirkel c_2. Deze twee cirkels raken elkaar in het punt $R\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.
Zie de figuur.

figuur



Er zijn twee bewegende punten, P en Q. Punt P draait rond over cirkel c_1, punt Q draait rond over cirkel c_2. In de figuur zijn de posities van P en Q op een bepaald tijdstip weergegeven. Verder is gegeven:

- Op $t = 0$ bevinden de punten P en Q zich in R.
- Beide punten bewegen tegen de wijzers van de klok in.
- Beide punten bewegen met constante snelheid.
- De snelheid van P is gelijk aan de snelheid van Q.
- Op $t = 12$ bevindt punt Q zich, sinds $t = 0$, voor het eerst weer in R.
- Op $t = 12$ heeft punt P precies vier maal c_1 doorlopen.

De y-coördinaat van punt Q wordt gegeven door een formule van de vorm:

$$y_Q = k + l \cdot \sin(m(t - n))$$

6p **10** Bereken waarden van k, l, m en n waarvoor deze formule in overeenstemming is met de gegevens.

Klavertje drie

Het punt P beweegt over een baan gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x_P(t) = 4\cos(t) + \cos(4t) \\ y_P(t) = 4\sin(t) + \sin(4t) \end{cases} \text{ met } t \text{ in seconden en } 0 \le t \le 2\pi$$

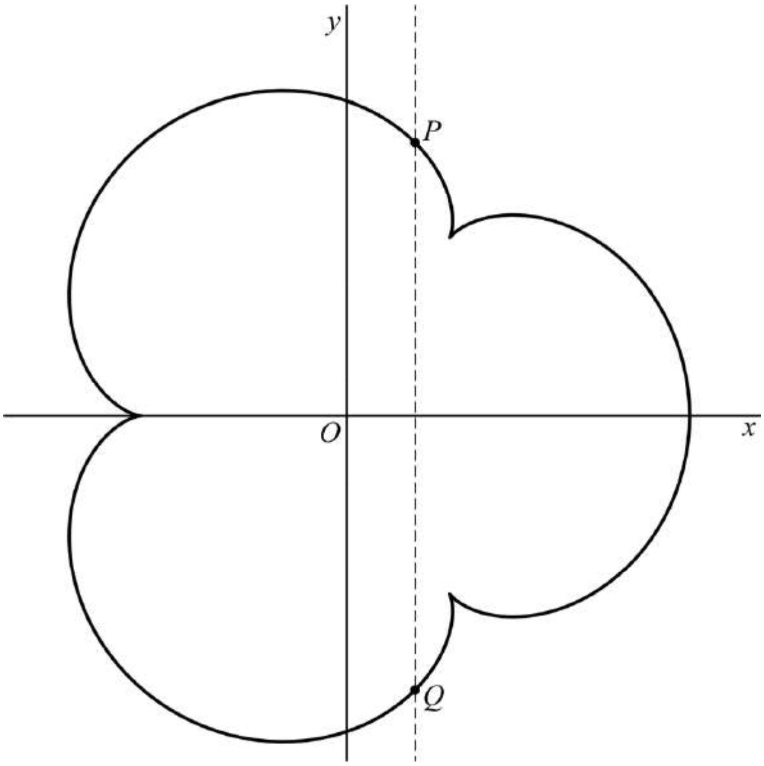
De baan waarover punt P beweegt, is weergegeven in de figuur.

Het punt Q beweegt ook over deze baan. Punt Q loopt π seconden voor op punt P. De bewegingsvergelijkingen van Q zijn dus:

$$\begin{cases} x_Q(t) = 4\cos(t+\pi) + \cos(4(t+\pi)) \\ y_Q(t) = 4\sin(t+\pi) + \sin(4(t+\pi)) \end{cases} \text{ met } t \text{ in seconden en } 0 \le t \le 2\pi$$

Er zijn twee momenten waarop P en Q recht boven elkaar liggen, dus dan geldt $x_P = x_Q$. In de figuur is zo'n situatie weergegeven.

figuur



5p **9** Bereken exact de afstand tussen P en Q in deze situaties.

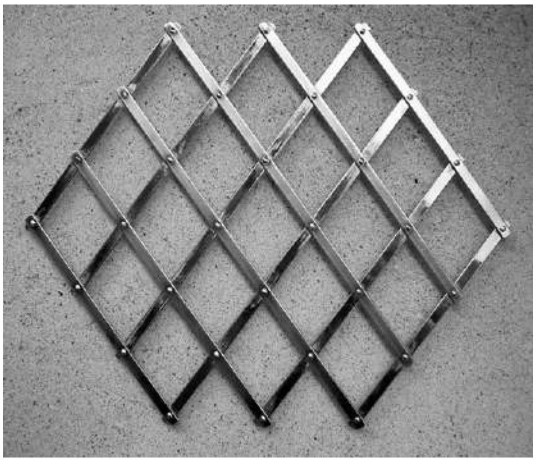
Op tijdstip $t = \frac{2}{3}\pi$ bevindt het punt P zich in $\left(-2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

6p **10** Bereken exact de scherpe hoek in graden tussen de raaklijn aan de baan in punt P en de x as.

Onderzetter

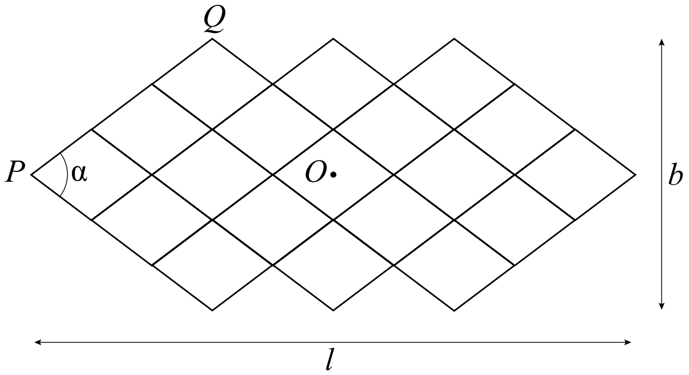
Een bepaalde onderzetter bestaat uit staven die onderling kunnen scharnieren. Deze onderzetter heeft 19 gelijke ruiten. Zie de foto.

foto



In een wiskundig model van deze onderzetter worden de breedte en de dikte van de staven verwaarloosd.
Het meest linkse scharnierpunt van het model noemen we P, het scharnierpunt linksboven noemen we Q en het midden van de middelste ruit noemen we O. De grootte van de binnenhoek bij P in radialen noemen we α. Zie figuur 1.

figuur 1



We kiezen lengte 1 voor de zijde van een ruit.
De lengte l en de breedte b van het model zijn functies van α, waarbij $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Er geldt: $l = 10\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ en $b = 6\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$.

3p **4** Toon aan dat de formules voor l en b juist zijn.

4p **5** Bereken exact de waarde van b als $l = 8$.

Als we α van 0 tot π laten toenemen, zal b toenemen en l afnemen.

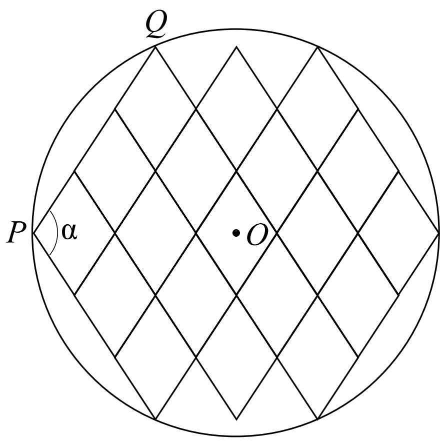
5p **6** Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van α de breedte b even snel toeneemt als de lengte l afneemt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Er geldt: $OQ = \sqrt{4 + 5\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$

5p **7** Toon aan dat de formule voor OQ juist is.

Het model van de onderzetter kan zodanig gescharnierd worden dat zes van de acht buitenste scharnierpunten op één cirkel met middelpunt O liggen.
Zie figuur 2.

figuur 2



4p **8** Bereken voor welke waarde van α dit het geval is. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Twee sinusoïden

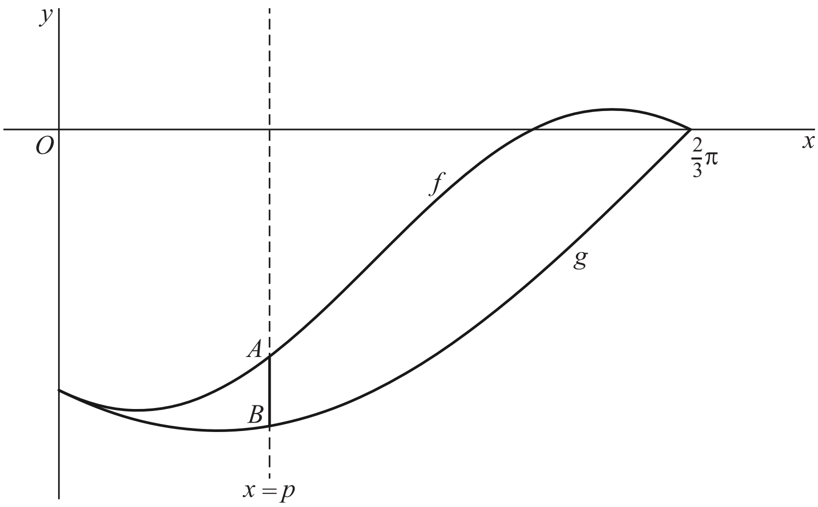
De functies f en g zijn gegeven door:

$f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{1}{4}\sqrt{3}$ en

$g(x) = \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$

In de figuur zijn de grafieken van f en g weergegeven op het interval $[0, \frac{2}{3}\pi]$. Verder is de lijn getekend met vergelijking $x = p$, met $0 < p < \frac{2}{3}\pi$. Deze lijn snijdt de grafiek van f in punt A en de grafiek van g in punt B.

figuur



De lengte van lijnstuk AB is afhankelijk van p. Voor een bepaalde waarde van p is deze lengte maximaal.

7p **7** Bereken exact voor welke waarde van p de lengte van lijnstuk AB maximaal is.

Gelijke hellingen

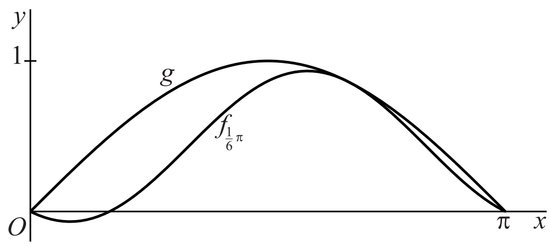
Voor elke a met $-\frac{1}{2}\pi < a < \frac{1}{2}\pi$ wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \sin x \cdot \sin(x - a)$ met domein $[0, \pi]$.

De afgeleide functie van f_a kan worden geschreven als $f_a'(x) = \sin(2x - a)$.

3p **10** Bewijs dit.

De functie g is gegeven door $g(x) = \sin x$ met domein $[0, \pi]$.
In de figuur zijn de grafieken van g en $f_{\frac{1}{6}\pi}$ getekend.

figuur



Deze twee grafieken raken elkaar in een punt met $x = \frac{2}{3}\pi$. In dat punt is de helling van beide grafieken dus gelijk. Er zijn nog twee andere waarden van x waarvoor de helling van de grafiek van $f_{\frac{1}{6}\pi}$ gelijk is aan de helling van de grafiek van g.

6p **11** Bewijs dat deze x-waarden $\frac{2}{3}\pi$ van elkaar verschillen.