

Twee halve cirkels

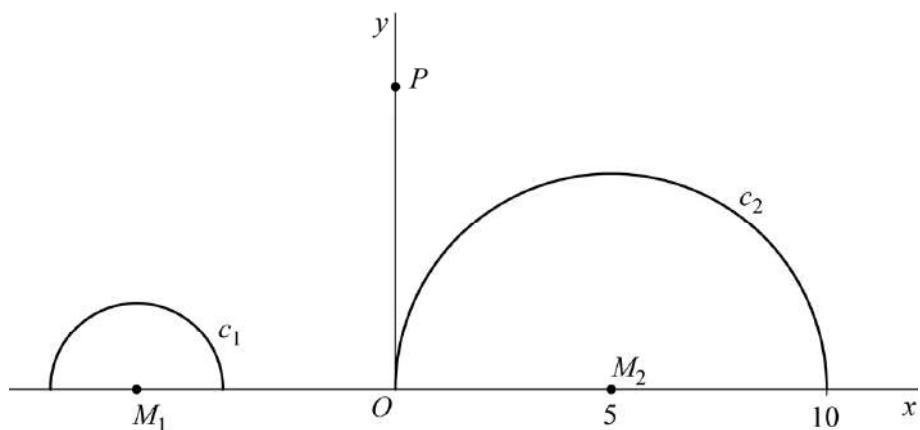
Gegeven zijn de twee halve cirkels c_1 en c_2 .

Voor c_1 geldt: $x^2 + y^2 + 12x = -32$, het middelpunt is M_1 en $y \geq 0$.

Voor c_2 geldt: het middelpunt is $M_2(5, 0)$, de straal is 5 en $y \geq 0$.

Op de positieve y -as ligt een punt P . Zie de figuur.

figuur



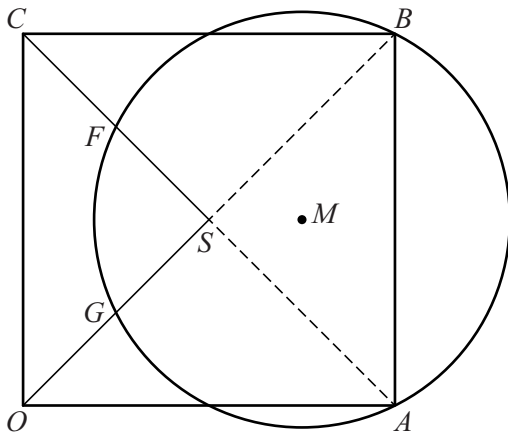
P wordt zo op de y -as gekozen dat de afstand van P tot c_1 twee keer zo groot is als de afstand van P tot c_2 .

- 7p **10** Bereken de y -coördinaat van P voor deze situatie. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Buiten een vierkant

Gegeven is het vierkant $OABC$ met $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ en $C(0, 4)$.
Het snijpunt van OB en AC is het punt S .
Het punt $M(3, 2)$ is het middelpunt van een cirkel door A en B .
De punten F en G zijn de snijpunten van deze cirkel met CS respectievelijk OS . Zie figuur 1.

figuur 1



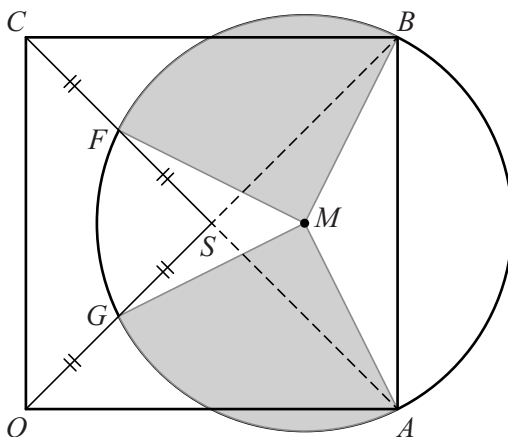
Er geldt: F is het midden van CS .

5p 15 Bewijs dat F inderdaad het midden is van CS .

Verder geldt: G is het midden van OS .

In figuur 2 zijn de cirkelsectoren BMF en GMA grijs gemaakt.

figuur 2



De oppervlakte van deze twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel.

3p 16 Bewijs dit.

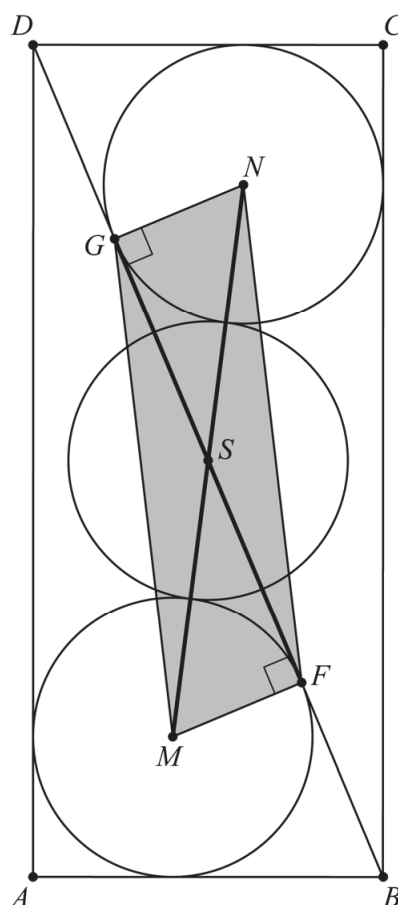
Rechthoek met drie cirkels

In de figuur is een rechthoek $ABCD$ getekend met daarin drie cirkels. Ook is de diagonaal BD getekend. Hierdoor ontstaan de driehoeken ABD en BCD . Gegeven is verder:

- de drie cirkels hebben dezelfde straal r ;
- de onderste cirkel heeft middelpunt M en raakt aan elke zijde van driehoek ABD . Deze cirkel raakt zijde BD in het punt F . Er geldt dus dat MF loodrecht op zijde BD staat;
- de bovenste cirkel heeft middelpunt N en raakt aan elke zijde van driehoek BCD . Deze cirkel raakt zijde BD in het punt G . Er geldt dus dat NG loodrecht op zijde BD staat;
- het middelpunt S van de middelste cirkel is het snijpunt van FG en MN ;
- de middelste cirkel raakt aan de bovenste en aan de onderste cirkel.

In de figuur is vierhoek $MFNG$ aangegeven. Deze vierhoek is te verdelen in twee rechthoekige driehoeken MFG en FNG .

figuur



- 5p 17 Onderzoek of de oppervlakte van vierhoek $MFNG$ groter dan, kleiner dan of gelijk aan de oppervlakte van een van de cirkels is.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.

Lijnen door de oorsprong en een cirkel

Gegeven is cirkel c met middelpunt $(1, 7)$ en straal 5 .

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een vectorvoorstelling van een lijn k door de oorsprong.

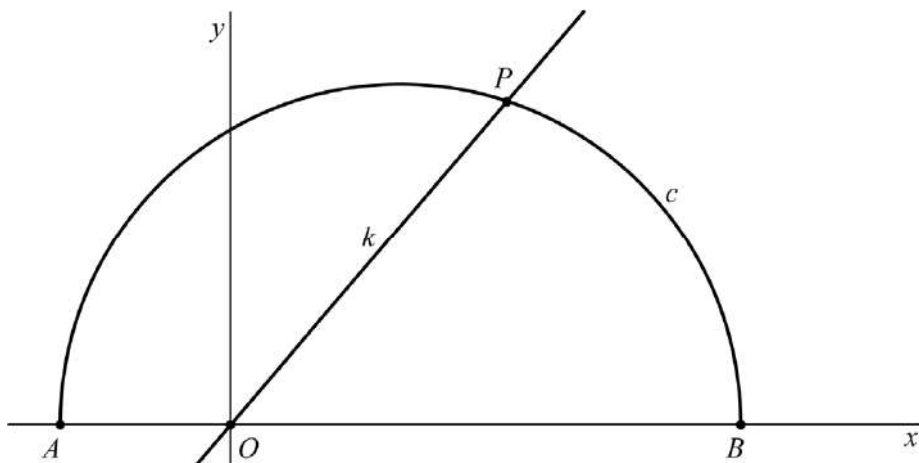
Lijn k snijdt cirkel c in twee punten.

5p **1** Bereken exact de coördinaten van deze snijpunten.

Halve cirkel

Gegeven zijn de punten $A(-1, 0)$ en $B(3, 0)$. Verder is gegeven de cirkel c met middellijn AB . De lijn k gaat door de oorsprong O en snijdt cirkel c in punt P . De afstand tussen O en P is gelijk aan $2\frac{1}{2}$. In figuur 1 zijn lijn k en de bovenste helft van cirkel c getekend.

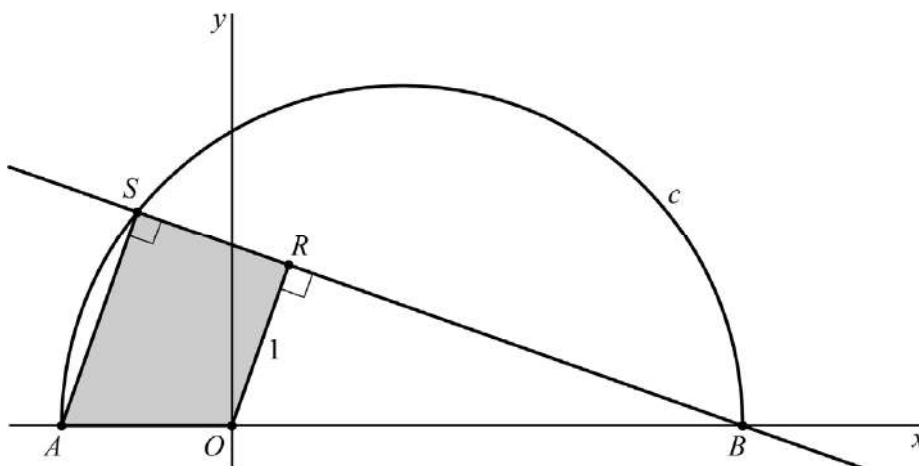
figuur 1



- 4p 11 Bereken exact de x -coördinaat van P .

In figuur 2 is de driehoek BRO getekend met $\angle BRO = 90^\circ$, punt R boven de x -as en $OR = 1$. De lijn door B en R snijdt c in het punt S . Driehoek BSA is dan een driehoek met $\angle ASB = 90^\circ$. Vierhoek $AORS$ is grijs weergegeven.

figuur 2



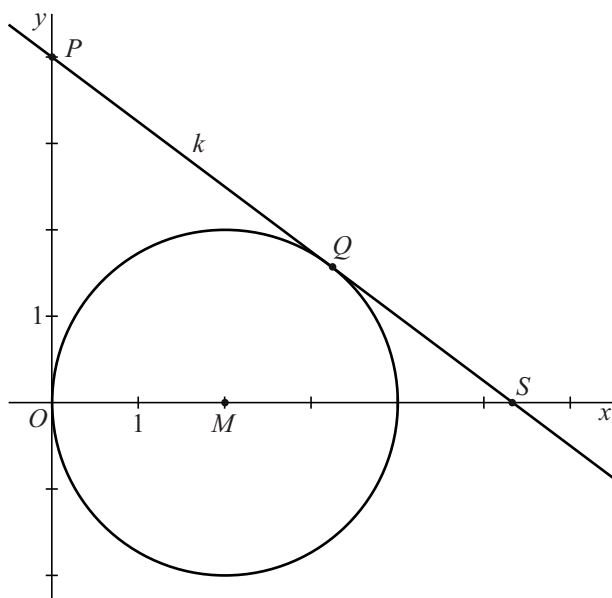
- 5p 12 Bereken exact de oppervlakte van vierhoek $AORS$.

Lijn en cirkel

Gegeven is de cirkel met middelpunt $M(2, 0)$ en straal 2.

De niet-verticale lijn k gaat door het punt $P(0, 4)$, raakt de cirkel in het punt Q en snijdt de positieve x -as in het punt S . Zie figuur 1.

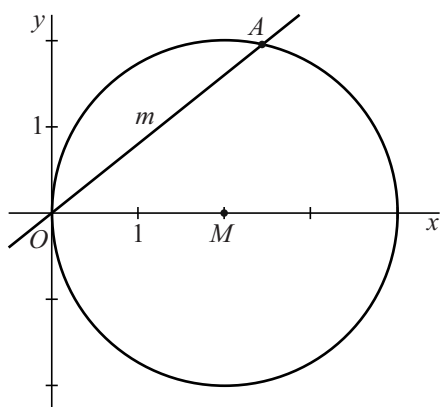
figuur 1



6p **6** Bereken exact de x -coördinaat van S .

De lijn m met vergelijking $y = px$ met $p > 0$ snijdt de cirkel behalve in O in een punt A , zodanig dat $OA = 3$. Zie figuur 2.

figuur 2



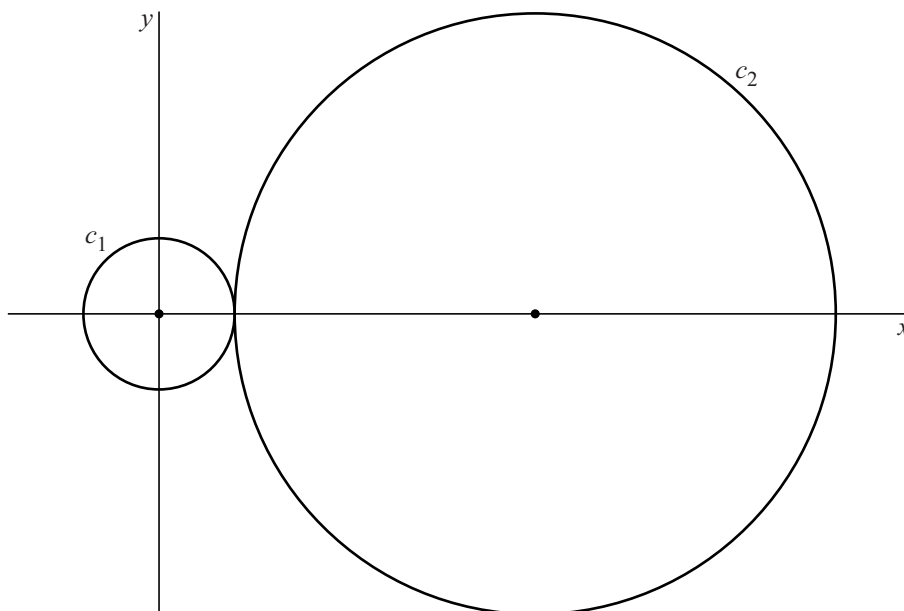
8p **7** Bereken exact de waarde van p .

Raakcirkel en raaklijnen

Gegeven zijn de cirkel c_1 met vergelijking $x^2 + y^2 = 9$ en de cirkel c_2 met vergelijking $(x-15)^2 + y^2 = 144$.

In de figuur zijn c_1 en c_2 getekend.

figuur



Cirkel c_3 met middelpunt op de positieve y -as raakt de beide cirkels c_1 en c_2 .

6p **16** Stel een vergelijking op van c_3 .

De cirkels c_1 en c_2 hebben drie gemeenschappelijke raaklijnen.

8p **17** Stel van elk van deze gemeenschappelijke raaklijnen een vergelijking op.

Rakende cirkel

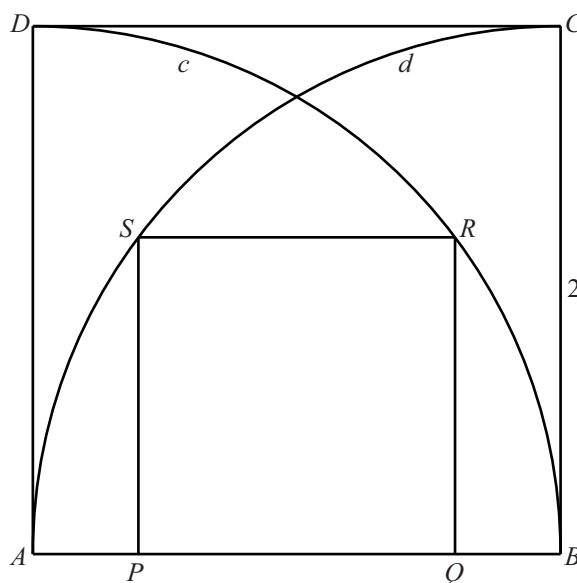
Gegeven is het vierkant $ABCD$ met zijde 2. Zie figuur 1.

In dit vierkant zijn getekend:

- de kwartcirkel c met middelpunt A en eindpunten B en D ;
- de kwartcirkel d met middelpunt B en eindpunten A en C ;
- het vierkant $PQRS$ met P en Q op AB , R op c en S op d .

Er geldt: $PQ = \frac{6}{5}$

figuur 1

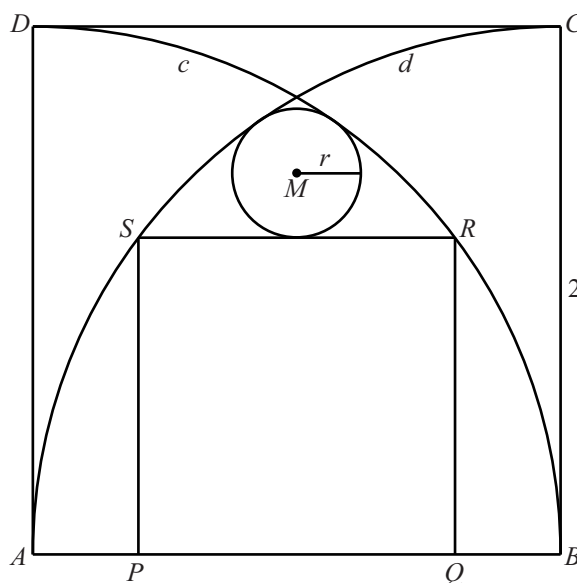


- 5p 11 Toon dit op algebraïsche wijze aan, bijvoorbeeld met behulp van driehoek AQR .

Aan de tekening in figuur 1 is een cirkel met middelpunt M en straal r toegevoegd, die RS en de beide kwartcirkels raakt. Zie figuur 2.

- 6p 12 Bereken exact de straal r .

figuur 2



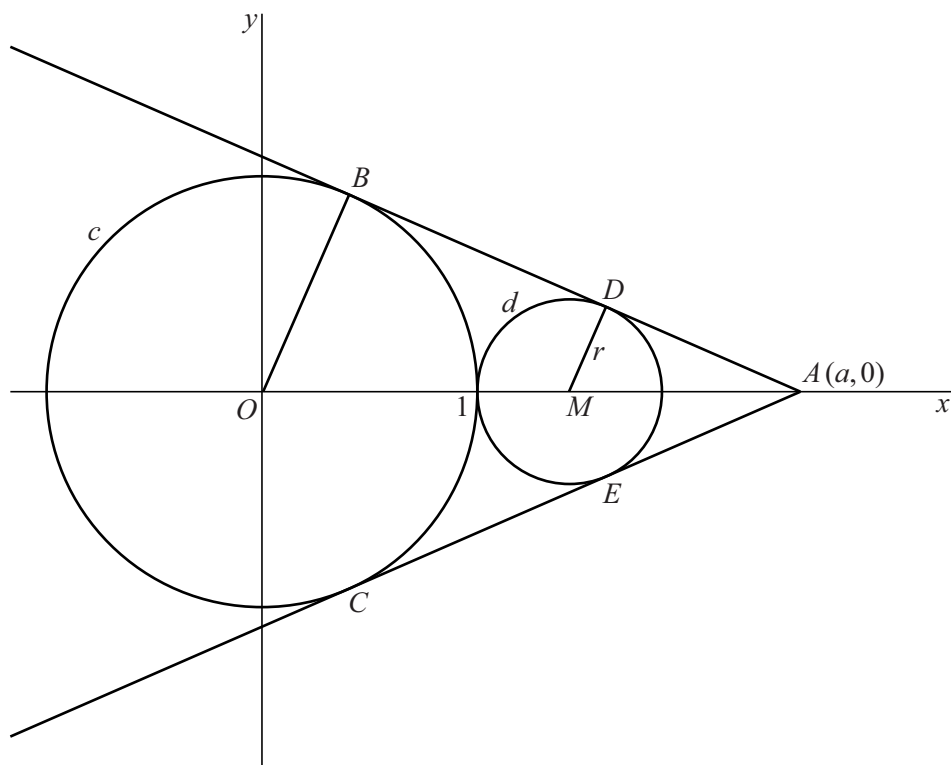
Ingesloten cirkel

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1. Verder is gegeven het punt $A(a, 0)$ met $a > 1$.

Er zijn twee lijnen door A die aan c raken. De raakpunten zijn B en C . De twee raaklijnen en cirkel c sluiten een cirkel d in. Cirkel d raakt de twee lijnen in D en E en cirkel c in $(1, 0)$. Cirkel d heeft middelpunt M .

Zie de figuur.

figuur



Driehoek AMD en driehoek AOB zijn gelijkvormig.

Voor de straal r van cirkel d geldt: $r = \frac{a-1}{a+1}$

5p **15** Bewijs dat $r = \frac{a-1}{a+1}$

Er is een waarde van a waarvoor vierhoek $OCAB$ een vierkant is. In dat geval kan de straal van cirkel d geschreven worden als $r = p + q\sqrt{2}$ waarbij p en q gehele getallen zijn.

5p **16** Bereken exact de waarden van p en q .

Cirkels in een cirkel

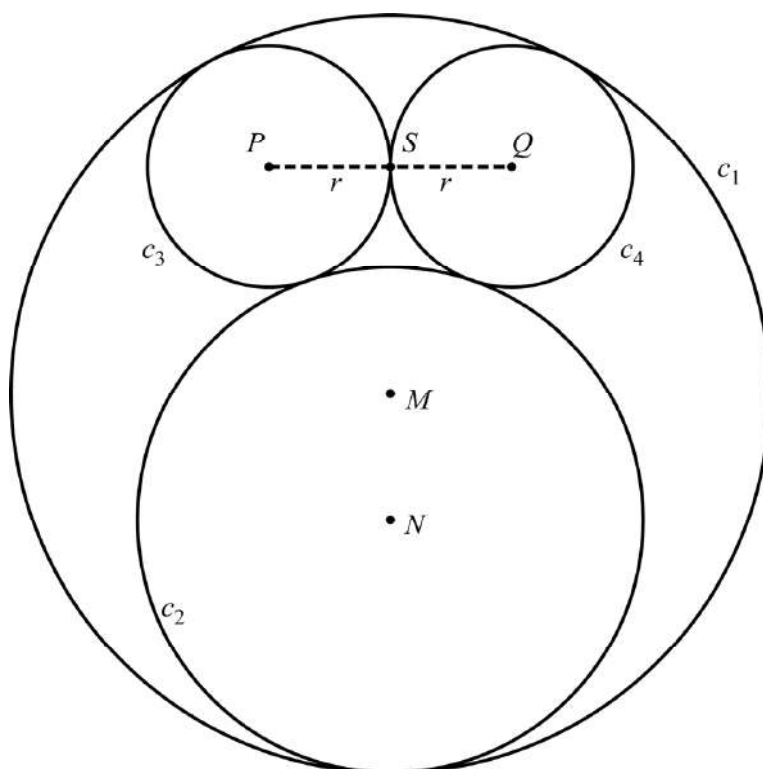
Gegeven is de cirkel c_1 met middelpunt M en straal 3.

Verder zijn gegeven de cirkels c_2 , c_3 en c_4 , zó dat geldt:

- Cirkels c_2 , c_3 en c_4 raken cirkel c_1 .
- Cirkel c_2 heeft middelpunt N en straal 2.
- Cirkel c_3 heeft middelpunt P en straal r .
- Cirkel c_4 heeft middelpunt Q en straal r .
- Cirkel c_3 en c_4 raken elkaar in punt S .
- Cirkels c_3 en c_4 raken c_2 .

Zie de figuur. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



Er geldt: $MS = \sqrt{9 - 6r}$

- 3p **6** Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Er geldt verder dat $MN = 1$.

- 6p **7** Bereken exact de waarde van r . Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.