

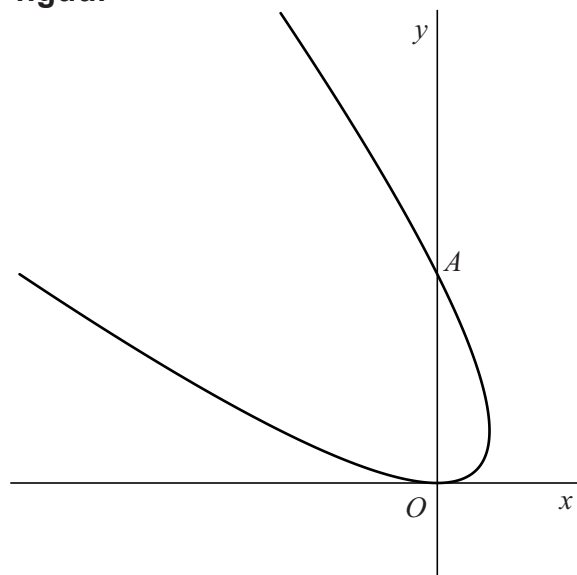
Bewegend punt

De beweging van een punt P wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t^2 \\ y(t) = (1 + t)^2 \end{cases}$$

In de figuur is de baan van P weergegeven.

figuur



De baan van P snijdt de y -as in de oorsprong O en in punt A .
Zie de figuur.

4p 1 Bereken exact de snelheid waarmee P door punt A gaat.

Voor elke waarde van t bevindt P zich op de kromme met vergelijking:

$$(x + y)^2 = 4y$$

4p 2 Bewijs dit.

Beweging over twee lijnen

Voor $t \geq 0$ beweegt het punt P volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x_P(t) = 8t^2 \\ y_P(t) = 4 - 4t^2 \end{cases}$$

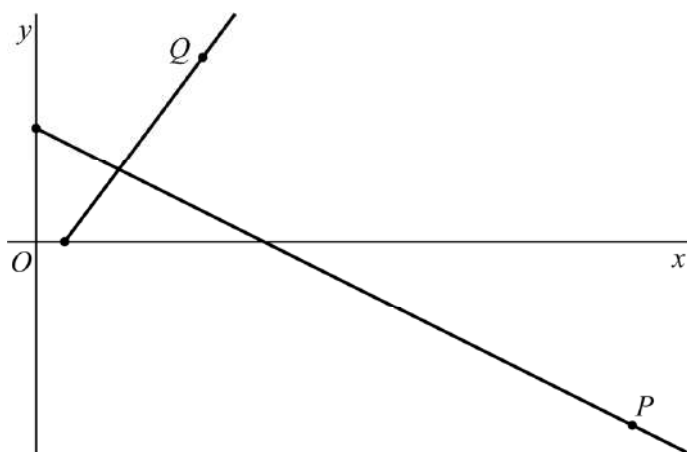
Voor $t \geq 0$ beweegt tegelijkertijd het punt Q volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x_Q(t) = 1 + 3t \\ y_Q(t) = 4t \end{cases}$$

Hierbij is t de tijd.

Zowel de baan van P als de baan van Q is een deel van een lijn. In figuur 1 zijn deze banen weergegeven.

figuur 1



In figuur 1 is de positie van P en van Q voor een waarde van t weergegeven. Er geldt:

- P ligt onder de x -as en Q ligt boven de x -as én
- P en Q hebben gelijke afstand tot de x -as.

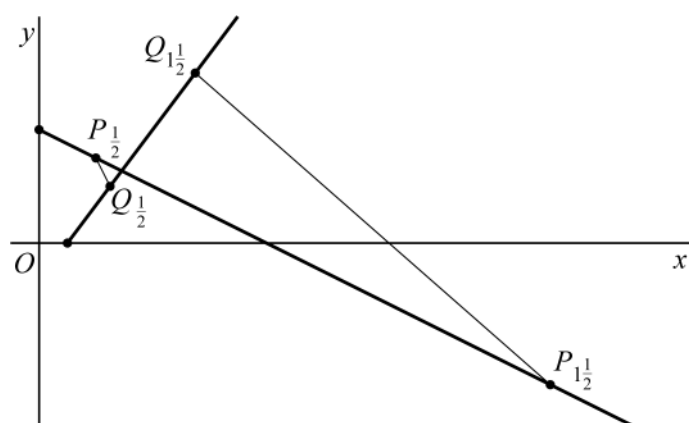
3p 1 Bereken exact de y -coördinaat van P in dit geval.

Punt Q beweegt met constante snelheid over zijn baan. De snelheid $v(t)$ waarmee P over zijn baan beweegt, is niet constant. Er geldt: op $t = \sqrt{5}$ is de snelheid van P acht keer zo groot als de snelheid van Q .

- 4p 2 Bewijs dat op $t = \sqrt{5}$ de snelheid van P inderdaad acht keer zo groot is als de snelheid van Q .

In figuur 2 zijn opnieuw de banen van P en Q weergegeven. Ook is voor $t = \frac{1}{2}$ en voor $t = 1\frac{1}{2}$ het lijnstuk PQ weergegeven. De helling van lijnstuk PQ is afhankelijk van t .

figuur 2



Op een tijdstip t is de helling van lijnstuk PQ gelijk aan $\frac{4}{3}$.

- 4p 3 Bereken exact de coördinaten van P in dit geval.

Bewegend punt

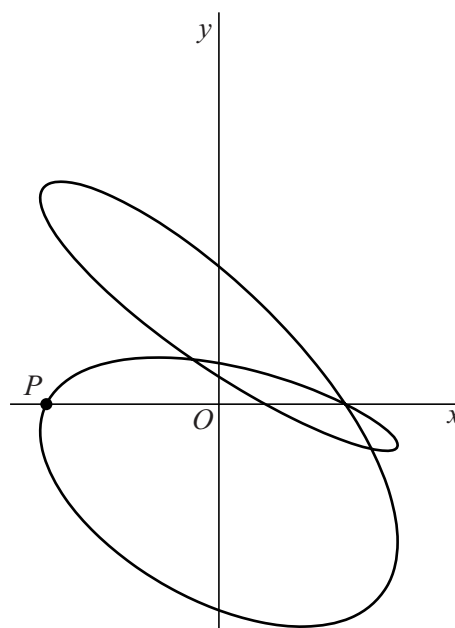
De beweging van een punt P wordt beschreven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) - \sin(2t) \\ y(t) = \sin(2t) - \sin(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Op verschillende tijdstippen bevindt P zich op de x -as. Op een van die tijdstippen bevindt P zich links van de y -as. Zie figuur 1, waarin de positie van P op dit tijdstip is aangegeven.

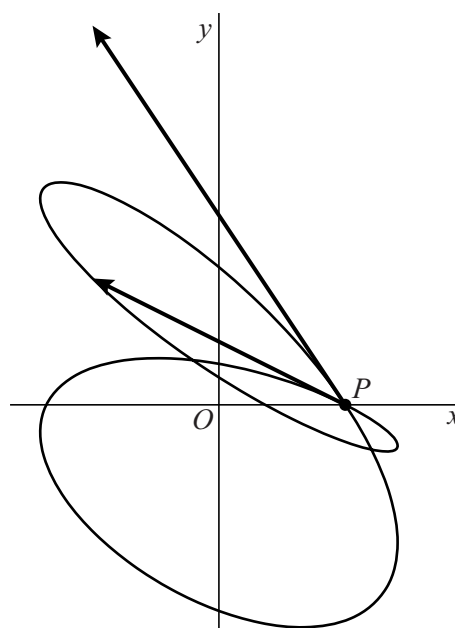
- 4p **2** Bereken exact de x -coördinaat van P op dit tijdstip.

figuur 1



Op de tijdstippen $t = 0$ en $t = \pi$ bevindt P zich in hetzelfde punt. Dit punt is met een stip aangegeven in figuur 2. Ook zijn de snelheidsvector van P op tijdstip $t = 0$ en de snelheidsvector van P op tijdstip $t = \pi$ aangegeven.

figuur 2



- 6p **3** Bereken algebraïsch de hoek in graden tussen deze twee snelheidsvectoren. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Een baan

Een punt beweegt voor $0 \leq t \leq 2\pi$ volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \sin(2t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

De baan van het bewegende punt is weergegeven in figuur 1.

Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ bevindt het bewegende punt zich in O . Deze situatie laten we in de gehele opgave verder buiten beschouwing.

P_t is de positie van het bewegende punt op tijdstip t .

Er geldt: de lijn door P_a en $P_{\pi-a}$ is voor elke in deze situatie mogelijke waarde van a verticaal.

3p 12 Bewijs dat die lijn inderdaad verticaal is.

Er zijn meerdere tijdstippen waarvoor geldt dat de afstand van P_t tot de x -as twee keer zo groot is als de afstand van P_t tot de y -as.

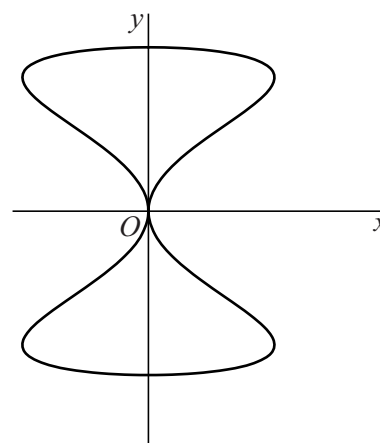
5p 13 Bereken exact het vierde tijdstip waarvoor dit het geval is.

Voor iedere waarde van t kunnen de snelheidsvector \vec{v} vanuit punt P_t en de vector $\overrightarrow{OP_t}$ worden getekend.

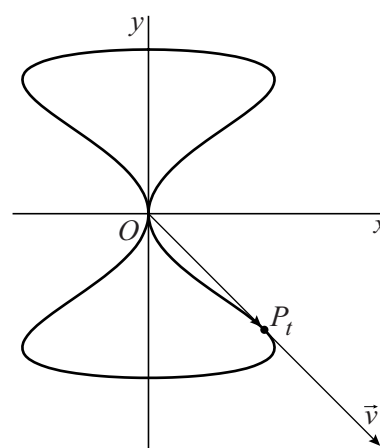
In figuur 2 zijn punt P_t , vector $\overrightarrow{OP_t}$ en vector \vec{v} getekend voor $t = \frac{3}{4}\pi$.

5p 14 Bewijs dat voor $t = \frac{3}{4}\pi$ geldt: $\overrightarrow{OP_t} = \vec{v}$

figuur 1



figuur 2



Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Twee bewegende punten

Voor $t \geq 0$ beweegt het punt P_1 volgens de bewegingsvergelijkingen:

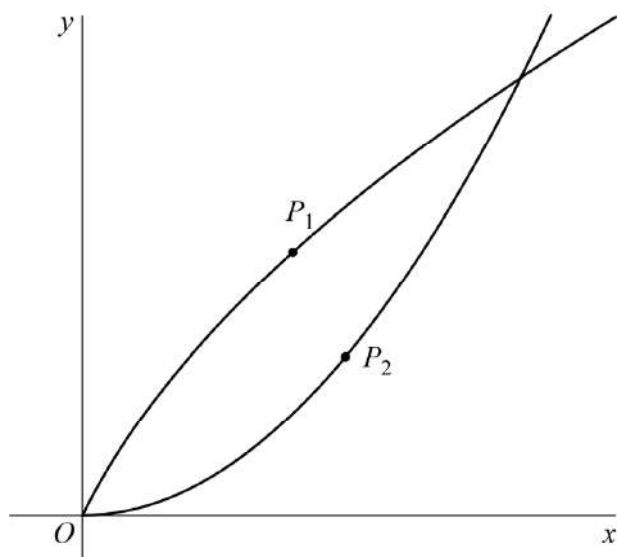
$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = 4t \end{cases}$$

Tegelijkertijd beweegt het punt P_2 volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 4t \\ y(t) = 2t^2 \end{cases}$$

In figuur 1 zijn beide banen getekend met daarop de punten P_1 en P_2 op een tijdstip t .

figuur 1



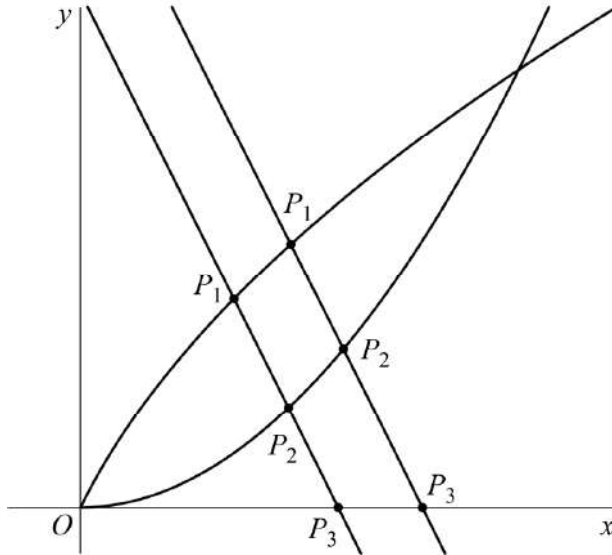
Voor de snelheid v_2 van P_2 geldt: $v_2(t) = 4\sqrt{t^2 + 1}$.

Er is één tijdstip t waarop de punten P_1 en P_2 gelijke snelheid hebben.

5p 11 Bereken exact dit tijdstip.

In figuur 2 zijn nogmaals beide banen getekend. Op twee tijdstippen, namelijk $t = 0$ en $t = 2$, vallen P_1 en P_2 samen. Op alle andere tijdstippen kun je de lijn l door P_1 en P_2 tekenen. In figuur 2 is dit voor twee tijdstippen gedaan.

figuur 2



De richtingscoëfficiënt van l is gelijk aan -2 voor elke waarde van t (met $t \neq 0$ en $t \neq 2$).

3p 12 Bewijs dit.

Voor elke waarde van t (met $t \neq 0$ en $t \neq 2$) is P_3 het snijpunt van l met de x -as. Zie figuur 2, waarin P_3 is aangegeven voor twee verschillende tijdstippen.

4p 13 Bereken exact op welk tijdstip de x -coördinaat van P_3 gelijk is aan 3.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Een ellipsvormige baan

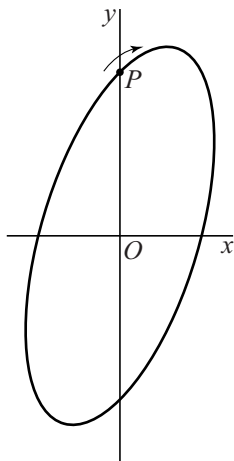
Punt P doorloopt in het Oxy -vlak een ellipsvormige baan volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \sin t \\ y(t) = \sin(t + \frac{1}{3}\pi) \end{cases}$$

Hierin is t de tijd.

De baan van P is weergegeven in figuur 1.

figuur 1



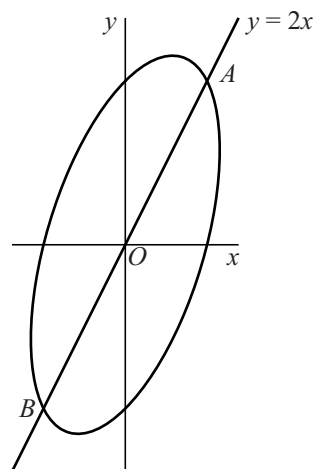
Gedurende de beweging verandert de afstand van P tot de oorsprong.

- 3p **3** Bereken de maximale afstand van P tot de oorsprong. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- 5p **4** Bereken exact de snelheid van P als $t = 0$.

De baan van P snijdt de lijn met vergelijking $y = 2x$ in de punten A en B . Zie figuur 2.

- 6p **5** Bereken exact de coördinaten van A en B .

figuur 2



Lus

Een punt beweegt in het Oxy -vlak volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t(t^2 - 1) \end{cases}$$

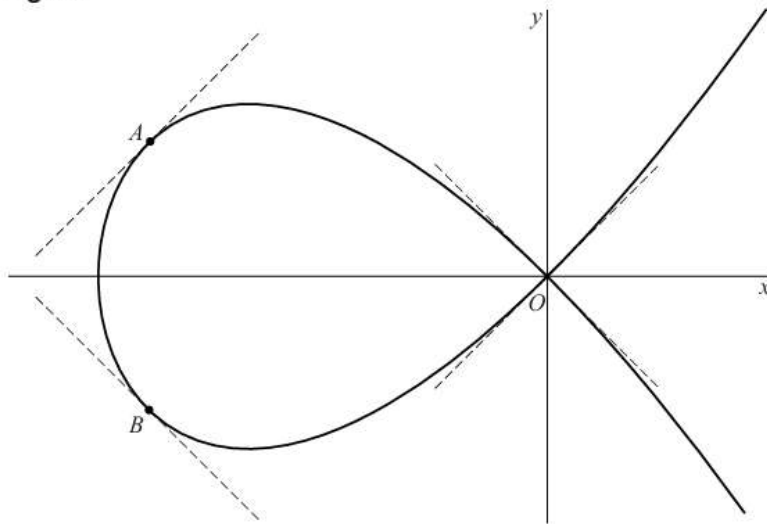
Hierin is t de tijd.

De baan van het punt heeft de vorm van een lus. Het punt bevindt zich op de tijdstippen $t = -1$ en $t = 1$ in de oorsprong O . In O heeft de baan van het punt twee raaklijnen.

Het bewegende punt passeert achtereenvolgens twee punten A en B waar de raaklijn aan de baan evenwijdig is met één van de raaklijnen in O .

Zie de figuur.

figuur



De benodigde tijd om van O naar A te bewegen, de benodigde tijd om van A naar B te bewegen en de benodigde tijd om van B naar O te bewegen, zijn alle drie even lang.

6p 11 Toon dit aan.

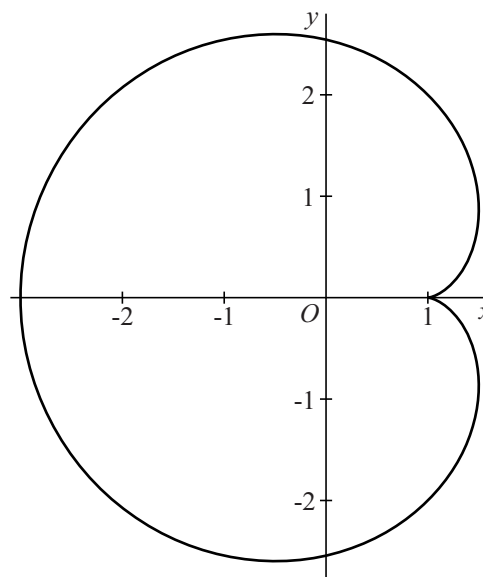
Een hartvormige kromme

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ wordt de beweging van een punt P beschreven door de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin t - \sin(2t) \end{cases}$$

In figuur 1 is de baan van P getekend. Voor $t = 0$ en $t = 2\pi$ bevindt P zich in $(1, 0)$.

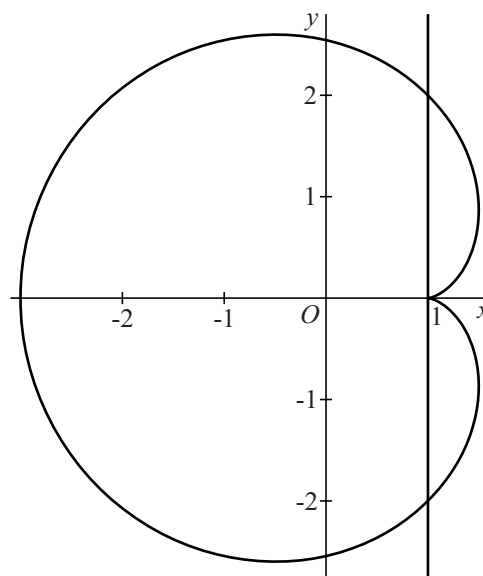
figuur 1



- 6p 11 Bereken exact de maximale snelheid van P .

De lijn met vergelijking $x = 1$ snijdt de baan van P behalve in het punt $(1, 0)$ ook in de punten $(1, a)$ en $(1, -a)$, met $a > 0$. Zie figuur 2.

figuur 2



- 6p 12 Bereken exact de waarde van a .

Tussen twee bewegende punten

Over de eenheidsdrcikel bewegen twee punten A en B . Beide punten bevinden zich op tijdstip $t = 0$ in het punt $(1, 0)$. Ze bewegen met constante snelheid, waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B .

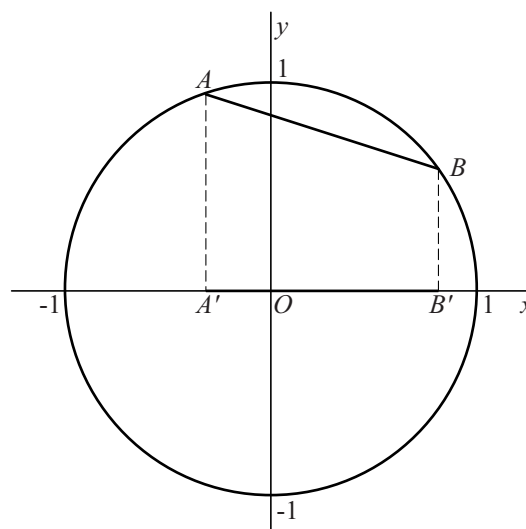
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn respectievelijk:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_B(t) = \cos t \\ y_B(t) = \sin t \end{cases}$$

Voor $t \neq k \cdot \pi$, met k geheel, vallen de punten A en B niet samen en zijn ze de eindpunten van de koorde AB .

In de figuur is de situatie getekend voor $t = \frac{1}{5}\pi$.

figuur



Lijnstuk $A'B'$ is de loodrechte projectie van koorde AB op de x -as.

De lengte van $A'B'$ verandert voortdurend tijdens de beweging.

- 4p 12 Bereken de maximale lengte van $A'B'$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Tijdens de beweging verandert ook de richtingscoëfficiënt van koorde AB . Deze richtingscoëfficiënt noemen we a . Voor elk tijdstip t , waarbij $t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$ met k geheel, geldt:

$$(1) \quad a = -\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$$

Deze formule kan bewezen worden met behulp van de volgende goniometrische formules:

$$(2) \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \quad (\text{voor elke waarde van } p \text{ en } q)$$

$$(3) \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad (\text{voor elke waarde van } p \text{ en } q)$$

- 4p 13 Bewijs formule (1) met behulp van formules (2) en (3).

Lijn l is de lijn met vergelijking $y = -x$. Er zijn vier waarden van t , met $0 < t < 2\pi$, waarvoor koorde AB evenwijdig is met l .

- 5p 14 Bereken exact deze vier waarden.

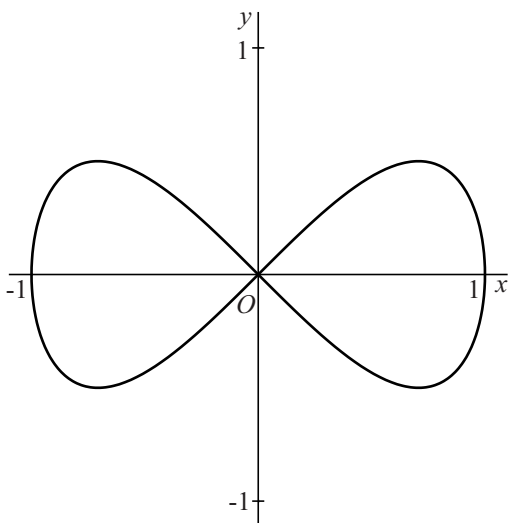
Lemniscaat

De beweging van een punt P wordt beschreven door de vectorvoorstelling:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \cdot \cos t \end{pmatrix} \text{ met } 0 \leq t < 2\pi$$

In de figuur is de baan van P getekend. Deze baan wordt **lemniscaat** genoemd.

figuur



Tijdens de beweging passeert punt P vier keer de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{4}$.

4p **4** Bereken exact voor welke waarden van t dit het geval is.

Tijdens de beweging gaat P twee keer door de oorsprong O . De richtingen waarin P de oorsprong passeert zijn verschillend.

7p **5** Bereken exact de hoek tussen deze twee richtingen.